ओळख:

आजही शाळेतील विद्यार्थी गणित अध्ययनात असमाधानी असतात. गणित हा कंटाळवाणा व निरस विषय आहे असे त्यांना वाटत असते. शिवाय पुष्कळशा विद्यार्थ्यांना गणित म्हणजे "काहीतरी चुक" किंवा "काहीतरी बरोबर" मिळविणे असे वाटते. जेव्हा त्यांचे उत्तर चुकते तेव्हा त्यांना स्वत:ला काही येत नाही असे वाटते. त्यामुळे त्यांची अध्ययनाची रूची कमी होते. याउलट दुसऱ्या बाजूला काही विद्यार्थी असेही असतात की ते परीक्षेत उर्त्तीण होण्यासाठी काहीतरी बरोबर मिळवितात.

जेव्हा शिक्षक गणित वेगळया पद्धतीने शिकविण्याचा प्रयत्न करतात तेव्हा त्यांच्याकडे खेळ आणि कृती व्यतिरीक्त दुसरे मार्ग उपलब्ध नसतात. या कृती आणि खेळ हे अध्ययनाची प्रक्रिया अधिक रूचीपूर्ण आणि परिणामकारक करतात. यासाठी गणित प्रयोगशाळेची रचना महत्वाची ठरते.

गणित प्रयोगशाळा हे एक असे ठिकाण आहे की जेथे आपणास खेळ, कोडी, शैक्षणिक साधने आणि इतर साहित्ये इत्यादींचा गणिती कृती करण्यासाठी संग्रह केलेला आढळतो. ही सर्व साहित्ये विद्यार्थ्यांनी व्यक्तीशः हाताळण्यासाठी किंवा शिक्षकांनी हाताळण्यासाठी असतात जेणे करून गणित जगाचा शोध करता येईल आणि गणितात रुची निर्माण करता येईल. जरी गणित ही शाखा भौतिक, रसायन किंवा जीव इत्यादींसारखी प्रयोगात्मक शास्त्र नसले तरीही गणित प्रयोगशाळा गणिती संकल्पना आणि कौशल्ये समजण्यासाठी योगदान करतात.

पुढील काही मार्ग पाहता असे दिसून येते की गणित प्रयोगशाळा गणित अध्यापनासही मदत करतात.

- कृतीतून अध्ययन यासाठी गणित प्रयोगशाळा संधी उपलब्ध करून देतात. यात खूपशा मूर्त कृती अशा असातात की त्या विद्यार्थांना अमूर्त विचारसरणीचा पाया तयार करतात.
- वैयक्तीक सहभागास या कृती खूप वाव निर्माण करून देतात. तसेच विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र अध्यायनासाठी प्रवृत्त करतात आणि विद्यार्थ्यांना स्वतः शिकण्यासाठी उद्युक्त करतात.
- गणित प्रयोगशाळेतील कृती या अनुभवाच्या कक्षा रुंदावतात आणि विषय व संकल्पनेमध्ये योग्य दुवा साधून गणितातील योग्य क्षेत्रांचे अध्ययन करण्यास पायाभूत ठरतात.
- खुपसे खेळ आणि कोडी यांमध्ये विद्यार्थी नियमांचा वापर करण्यास शिकतात आणि या नियमांत बदल करण्याची संधीही त्यांना येथे मिळते. या प्रक्रियेत विद्यार्थ्यांना गणिती प्रश्नांमध्ये नियम आणि बंधने यांच्या भूमिकेची जाणिव होते.
- प्रत्येक कृतीसाठी व्यक्तीशः वेगळा वेळ देणे शक्य असते आणि एक कृती कितीही वेळा करण्याची मूभा असते. त्यामुळे विद्यार्थी त्या कृतीची पूनः पून्हा उजळणी करू शकतात. त्यावर विचार करू शकतात आणि प्रश्नाची उकल पाहू शकतात. यामुळे उच्च बोधात्मक क्षमता विकसित होते.
- या कृतींमुळे विद्यार्थ्यांमध्ये आत्मविश्वास वाढतो आणि कृतीपूर्ण अध्यापनामुळे रूचीही वाढीस लागते.
- महत्त्वाचे म्हणजे शालेय गणित अध्ययनात या कृतींमूळे विविधता आणता येते.

या भागात आपण शालेय गणित प्रयोगशाळेत करायच्या कृतींचा विशेषतः अंतर्भाव केला आहे. या कृती इयत्ता 6 वी ते 10 वी

च्या विद्यार्थ्यांसाठी उपयुक्त आहेत. त्यात स्थानिक किंमतीचा साप आणि अपूर्णांक तक्ता अशा काही प्राथमिक शाळेतील विद्यार्थ्यांसाठीच्या कृतींचाही कृतींचाही अंर्भाव आहे. यातील सर्व घटक हे दोन महत्त्वाच्या गटांत विभागलेले आहेत:- **कृती** आणि **खेळ व कोडी**. या सर्व कृती विद्यार्थी शिक्षकाच्या मार्गदर्शनाने वैयक्तीकपणे करू शकतात किंवा छोट्या विद्यार्थी गटाला एकत्र घेऊनही काही प्रात्यक्षिके दाखविता येतात. काही कृती या वर्गाध्यपनात शैक्षणिक साधन वापरूनही दाखविता येतात. यातील खेळ व कोडी वैयक्तीकपणे खेळण्यात मजा येते आणि प्रत्येक कृतीत एक गणिती घटक लपला आहे तो शोधता येतो. यातील काही कृती या होमी भाभा विज्ञान शिक्षण केंद्रातील तयार केलेल्या आहेत तर काही कृती या वेगवेगळी पुस्तके व लेखातून घेतलेल्या आहेत ज्यात नंतर बदल करून त्या विकसित केल्या आहेत.

भाग १

गणिती कृती

क्षेत्रफळ आणि परिमिती :

साहित्यः 10 इंच × 10 इंच चा प्लायवूड किंवा एक्रॅलिकचा चौरसाकृती बोर्ड, छोटे छोटे खिळे किंवा काडेपेटीच्या काड्या, दोरा.

परिमिती ही संकल्पना सोपी आसली तरीही बऱ्याचश्या माध्यमिक शाळेतील विद्यार्थ्यांना ती अवघड वाटते तसेच परिमितीचा क्षेत्रफळ या संकल्पनेशी असलेला संबंधही त्यांना माहित नसतो. काही विद्यार्थ्यांना संकल्पनाच स्पष्ट झालेली नसते. पुढील कृतीतून विद्यार्थ्यांना परिमितीची संकल्पनास्पष्ट होईल तसेच परिमिती व क्षेत्रफळ या दोन वेगवेगळया संकल्पना आहेत हे ही ते समजून घेऊ शकतील.

कृतीः चौरसाकृती बोर्डवर 1 इंच इतक्या अंतरावर उभे व आडवे होल बनवून घ्या. हे होल थोडे मोठे असू द्या. जर हा बोर्ड पारदर्शक एक्रॅलिक शिटचा बनलेला असेल तर याचा वापर OHP वरही होऊ शकतो. एक्रॅलिक शिट वापरण्याचा दुसरा फयदा असा होईल की ही शिट आलेख कागदावर ठेवल्यास अंदाजे क्षेत्रफळ काढणे सोपे जाईल. (थर्माकोल किंवा रबर अशी मटेरिअल्स जर उपलब्ध होत असतील तर तीही आपण वापरु शकतो.) काडेपेटीच्या काड्यांचे अर्धे-अर्धे तुकडे करा. काड्यांवरील फॉस्फरस काढून टाका. या ऐवजी आपण छोटेछोटे खिळेही वापरु शकतो.

हा बोर्ड वापरुन आपण खालील कृती करु शकतोः

- अंदाजे एक फूट लांबीचा दोरा घ्या. त्याची दोन्ही टोके एकमेकांना बांधा. हा दोरा व चार खिळे किंवा काड्या विद्यार्थ्यांना द्या. कोणकोणत्या आकृत्या ते बनवू शकतात? त्यांना या आकृत्यांना नावे देण्यास सांगा. आकृती बदलली तरीही काय बदलत नाही हे त्यांना विचारा. आकृतीच्या सीमारेषेची पूर्ण लांबी म्हणजे परिमिती अशा संकल्पनेची त्यांना ओळख करून द्या.
- 20 इंच लांबीचा दोरा घेऊन त्याचा लूप बनवा आणि चार काड्या किंवा खिळे घ्या. विद्यार्थ्यांना वेगवेगळया आकाराचे आयत बनविण्यास सांगा. कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वांत जास्त आहे?
- याच दोऱ्याच्या लूपने विद्यार्थ्यांना 3, 4, 5, 6 इतक्या काड्या वापरून आकृत्या बनविण्यास सांगा. त्यांना क्षेत्रफळ काढता येईल का? कोणत्या आकृतीचे क्षेत्रफळ सर्वांत जास्त आहे?
- विद्यार्थ्यांना क्षेत्रफळ दिलेले असताना तेवढ्या क्षेत्रफळासाठी आकृती बनविण्यास सांगा. कोणत्या आकृतीची परिमिती सर्वांत जास्त आहे?

जिओबोर्ड

साहित्यः 10 इंच × 10" इंच चा लाकडाचा किंवा एक्रॅलिकचा चौरसाकृती बोर्ड, खिळे, एक्रॅलिकचा वापर केला असेल तर सुपरग्लू.

शालेय शिक्षणात विद्यार्थ्यांना भूमितीच्या काही महत्वाच्या संल्कपनांची ओळख करून देण्यासाठी जिओबोर्डचा वापर केला जातो. यात एका कठीण लाकडी चौरसावर समान अंतरावर उभ्या व आडव्या रांगा असणारे खिळे ओळीने लावलेले असतात. समान अंतरावरील प्रत्येक खिळे एक चौरस तयार करतात. मात्र हे समान अंतर 2 किंवा 1 इंच असावे. या बोर्डावर लावलेले खिळे हे

लहान चुका असाव्यात व त्यांची वरची टोके लागणार नाहीत याप्रमाणे बोधट व गोल केलेली असावीत.

याप्रकारचा बोर्ड ऍक्रिलीकचाही बनवून आपण वापरू शकतो. मात्र त्या बोर्डखाली आलेख कागद ठेवून नंतर त्यावर खिळे चिकटविण्याची सोय करावी लागते.

प्रस्तूत बोर्डपासून वेगवेगळ्या भौमितीक आकृत्या रबर बॅन्डच्या सहाय्याने तयार करता येतात. शिवाय इतरही भरपूर कृती आपणास यावर करता येतात. त्यातील काही कृती पुढीलप्रमाणे आहेत.

- कोनांचे प्रकार अभ्यासणे
- परिमिती व क्षेत्रफळ
- समरूपतेचे गुणधर्म : दोन रबर बॅन्ड घेऊन त्रिकोण तयार केल्यास ते समरूप आहेत का? असल्यास किंवा नसल्यास का ते सांगा.
- यातील एक महत्वाची बाब म्हणजे कोणत्याही अनियमित आकृतीचे क्षेत्रफळ, पूर्ण आयत तयार करून आपण काढू शकतो. शिवाय क्षेत्रफळाच्या बाबतीतील प्रमेयेही सिद्ध करू शकतो. उदा. समांतर रेषांमध्ये स्थित असणाऱ्या समान पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे ही त्या समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मी असतात.
- जिओबोर्डवरील अजून एक मजेशीर कृती म्हणजे त्यावर सिद्ध करता येणारे " पायथागोरसचे प्रमेय ". अशी अट असणारे किती त्रिकोण आपणास रबर बॅन्डने तयार करता येतील तसेच तयार होणाऱ्या त्रिकोणांमध्ये काही संबंध दिसतो का तेही पाहता येते.
- जिओबोर्डवर आणखी एक महत्वाची रूचीपूर्ण कृती करता येते ती म्हणजे " पिक-चे प्रमेय " यावर शोधून काढणे. त्यासाठी कराव्या लागणाऱ्या कृतीच्या पायऱ्या पुढे दिल्या आहेत.

प्रथम जिओबोर्डवर रबर बॅन्डच्या सहाय्याने विविध बहुभुजाकृती काढून घ्याव्यात. आपणास या प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळे काढून दाखविता येतात. या सर्व आकृत्यांचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी पिकचे प्रमेय कसे कार्य करते आणि हे सूत्र कसे शोधावे ते पाहूया......!

प्रथम एका सोप्या आकृतीपासून सुरूवात करू. ज्याचे क्षेत्रफळ एक चौरस एकक असेल असा चौरस तयार करून घेऊ. आता या चौरसाच्या एका बाजूचा रबरबॅन्ड एक एकक पुढे नेला (म्हणजेच ती बाजू पुढे नेली) मात्र इतर बाजू तशाच ठेवल्या तर मिळणाऱ्या आकृतीचे क्षेत्रफळ किती असेल? याप्रमाणे प्रत्येकवेळी आकृती थोडी थोडी बदलून क्षेत्रफळ काढले. या आकृत्या पाहून पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

* लावलेल्या रबरबॅन्डच्या सिमेवरील बिंदूंची संख्या किती आहे? अंतर्भागातील बिंदूंची संख्या किती आहे?

* आकृती वाढवित गेल्यास सिमेवरील बिंदू व अंतर्भागातील बिंदू यांच्या संख्या तशाच राहतात का?

* कोणत्याही सिमेवरील बिंदू हा अंतर्भागातील बिंदू होतोय का?

* प्रत्येकवेळी बदलणाऱ्या आकृतीचे चौरस किंवा आयताच्या सहाय्याने क्षेत्रफळ काढा. त्या आकृत्यांच्या सिमेवरील बिंदू व अंतर्भागातील बिंदूंच्या संख्यांची नोंद घेऊन एक तक्ता तयार करा.

सिमेवरील बिंदू (B)	अंतर्भागातील बिंदू (I)	क्षेत्रफळ (A)

आता या विविध मापनांमध्ये (नोंदींमध्ये) काही संबंध दिसतो का? या मापनांचे एक सामान्य सूत्र तयार होते का?

या नोदींमध्ये संबंध पाहता ते सूत्र पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$A=\frac{B}{2}+I-1$$

येथे, A = त्या बहुभुजाकृतींचे क्षेत्रफळ,

B = सिमेवरील बिंदूंची संख्या,

I = अंतर्भागातील बिंदूंची संख्या.

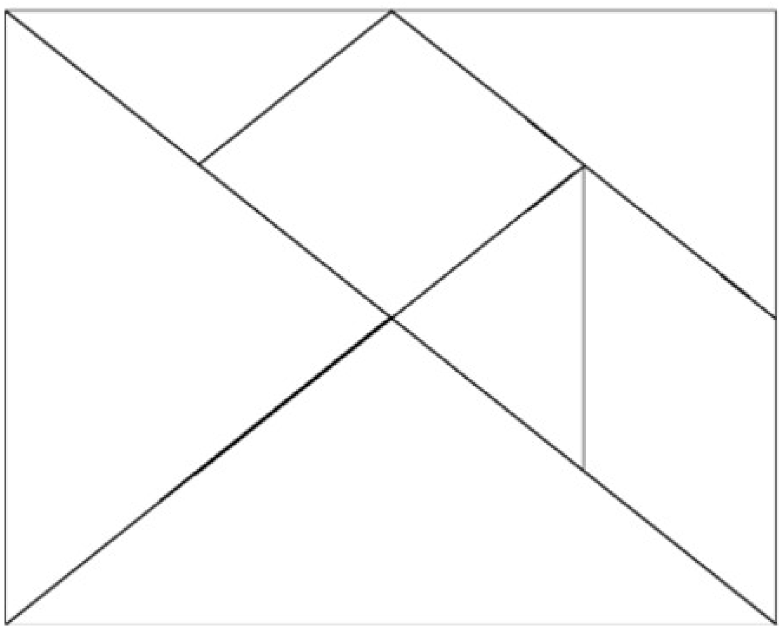
टॅनग्रॅम

साहित्यः कार्ड पेपर.

टॅनग्रॅमच्या संचामध्ये एका मोठ्या चौरसापासून कापलेले सात तुकडे असतात. या तुकड्यांचा आकार आकृतीत दाखविला आहे. टॅनग्रॅम हे कोडे एक हजार वर्षांपूर्वी चीनमधील लोकांनी तयार केले. मुलांना भूमितीय संबंध शिकविण्यासाठी टॅनग्रॅम हे कोडे उपयुक्त आहे.

कृतीः टॅनग्रॅम बनविण्यासाठी एक कार्डपेपरचा चौरस कापून घ्या.(अंदाजे 10 इंच □ 10 इंच) या चौरसाचे आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे छोटे छोटे तुकडे करा. टॅनग्रॅमचे तुकडे वापरून आपण शंभरपेक्षाही जास्त आकृत्या बनवू शकतो.

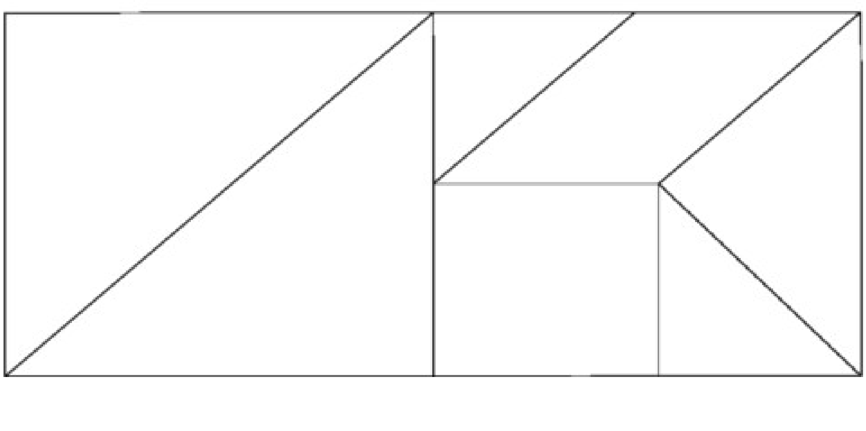
TANGRAM

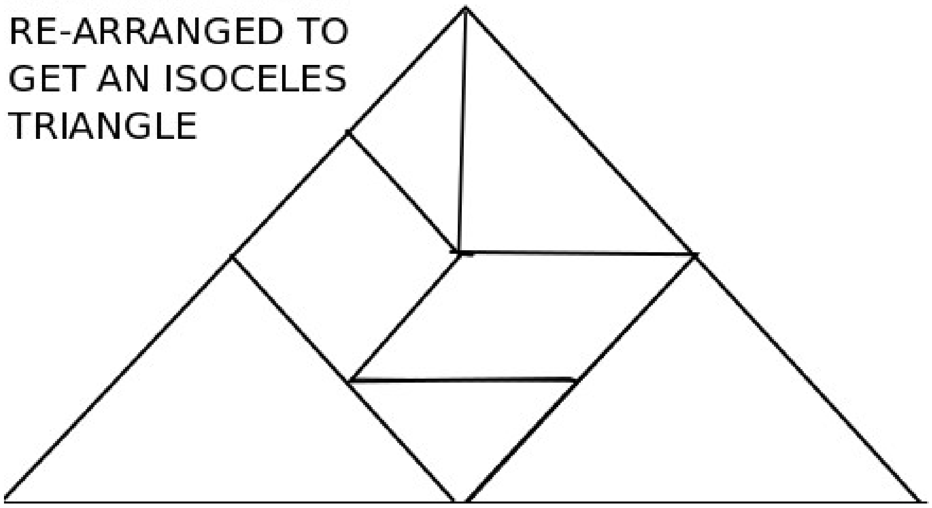


टॅनग्रॅमचा वापर वेगवेगळे भूमितीय आकार समजून घेण्यासाठी होतो. या कोड्याचा वापर करून आपण पुढील कृती करू शकतो:

- टॅनग्रॅममध्ये असणाऱ्या वेगवेगळ्या आकारांची नोंद करा. या संचामध्ये समभूज त्रिकोणांच्या किती जोड्या आहेत?
- जर सर्वांत लहान त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक असेल तर प्रत्येक आकाराचे क्षेत्रफळ किती? संपूर्ण आकृतीचे क्षेत्रफळ किती?
- दोन छोटे त्रिकोण घेऊन ते एकत्र जोडून समान क्षेत्रफळाचे चौरस, त्रिकोण, समांतरभूज चौकोन मिळविण्याचा प्रयत्न करा.
- वरील कृती दोन मोठ्या त्रिकोणांसाठी पुन्हा करा.
- दोन छोट्या आकारांचे त्रिकोण व एक मध्यम आकाराचा त्रिकोण घेऊन एक चौरस, एक त्रिकोण व एक समांतरभूज चौकोन तयार करा.
- दोन छोटे त्रिकोण व एक समांतरभूज चौकोन वापरून एक आयत व एक समलंब चौकोन तयार करा.
- दोन छोटे त्रिकोण एक मध्यम आकाराचा त्रिकोण व एक मोठा त्रिकोण घेऊन एक चौरस, एक समलंब चौकोन व एक समांतरभुज त्रिकोण व एक समांतरभूज चौकोन तयार करा.
- दोन छोटे त्रिकोण व एक चौरस वापरून एक आयत, एक समलंब चौकोन व एक समांतरभूज चौकोन तयार करा.
- सातही तुकडे वापरून एक चौरस, एक आयत आणि एक त्रिकोण तयार करा.
- सर्वांत लहान त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ जर एक एकक असेल तर दिलेल्या सर्व आकृत्यांची क्षेत्रफळे काढा.
- टॅनग्रॅमच्या तुकड्यांचा वापर करून मध्यबिंदूचे प्रमेय आणि यासारखी अनेक प्रमेये तसेच समांतरभूज चौकोनाचे प्रमेय यांची चर्चा केली जाऊ शकते.

TANGRAM PIECES RE ARRANGED TO GET A RECTANGLE





कोनिक सेक्शन

साहित्य: चिकण माती, चार्ट पेपर, बारीक वायर्स, कात्री/ कटर, कोरा कागद, पेन, लाकडी बोर्ड, खिळे, दोरी, फिल्टरपेपर, ड्रॉईंग पिन्स, दोरा.

शंकूचा पाया विविध कोनांमधून कापल्यास आपल्याला विविध भूमितीय आकार मिळतात. उदा.वर्तुळ, इलिप्स, पॅराबोला, हायपरबोला, इत्यादी.

कृती:

चिकणमाती वापरून कोनिक सेक्शन:

एक पोकळ असलेला शंकू घेऊन तो त्याच्या कडांवर तिरकस कापा आणि तो उघडा. आपल्याला वर्तुळाचा एक भाग मिळेल. म्हणजेच आपल्याला वर्तुळाच्या तुकड्यापासून शंकू बनविता येईल. कात्रीचा वापर करून कार्डपेपर वर्तुळाकृती कापून घ्या. वर्तुळाचा अंदाजे पाव भाग कापून टाका, पाऊण भाग तुमच्याजवळ शिल्लक राहील. या भागाचा शंकू बनवा. एकमेकांवर येणारे भाग चिकटवा किंवा स्टेपल करा. बटर पेपर किंवा ट्रेसिंग पेपर वापरून अजून एक शंकू तयार करा परंतु तो चिकटवू नका. हा शंकू चार्टपेपरच्या शंकूच्या आत मध्ये ठेवा. आता,चार्ट पेपरच्या शंकूच्या आत बटर पेपरचा एक थर तयार झालेला दिसेल. हा शंकू चिकण मातीने भरून घ्या. बटरपेपरसहित चिकणमातीचा शंकू बाहेर काढा आणि बटर पेपर बाजूला काढा.

एक बारीक वायर घ्या. तिची दोन्ही टोके हातांमध्ये धरून वायर ताणा. आता ही वायर शंकूच्या पायाला वेगवेगळ्या कोनांमधून कापण्यासाठी वापरा.

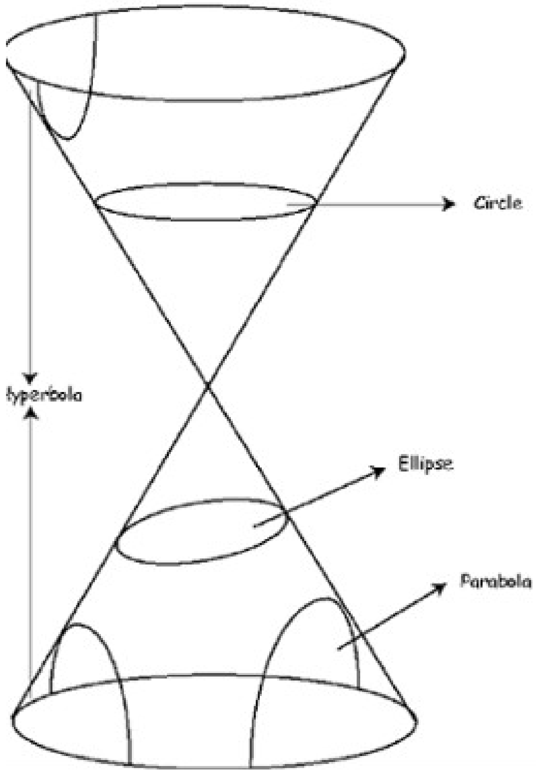
पायाला समांतर कापल्यास वर्तुळ मिळेल.

तिरकस बाजुला समांतर कापल्यास पॅराबोला मिळेल .

शंकूला तिरकस कापल्यास इलिप्स मिळेल .

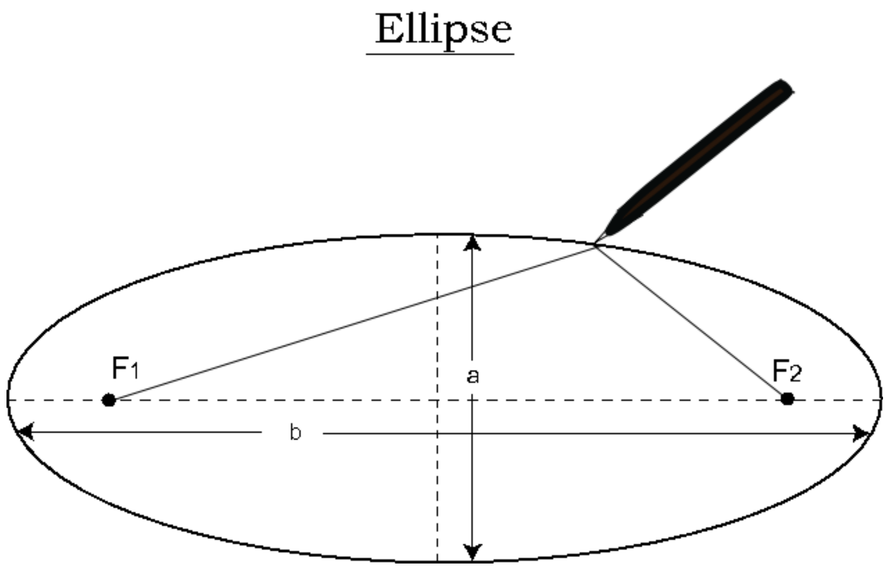
शंकूच्या अक्षाला समांतर कापल्यास हायपरबोला मिळेल.

CONIC SECTIONS



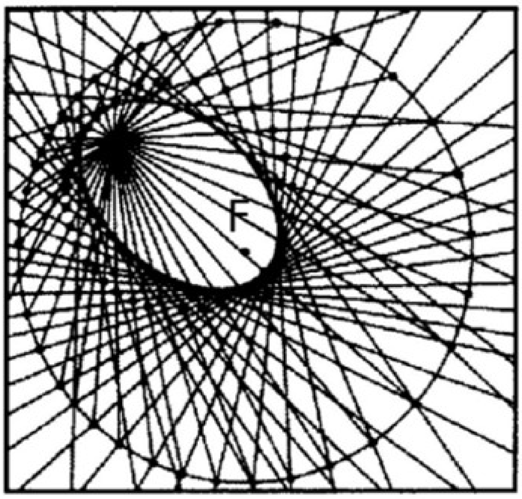
दोन खिळयांचा वपर करून इलिप्स काढणे:

इलिप्स काढण्याचा सोपा मार्ग म्हणजे दोरा आणि खिळे यांचा वापर करणे. एका लाकडी बोर्डवर ठराविक अंतरावर दोन खिळे मारून घ्या. खिळयांमधील अंतराच्या तिप्पट अंतराइतक्या लांबीचा दोरा घेऊन त्याचा फास तयार करा आणि तो खिळयाभोवती गुंडाळा. आता पेन्सिलीचे टोक या फासामध्ये ठेऊन दोन्ही खिळयांभोवती फिरवा. हे करताना पेन्सिल तिरकी धरा. तुम्हाला जी आकृती मिळेल ती इलिप्सची असेल. इलिप्सच्या दोन केंद्रकांपासून इलिप्सवरील कोणत्याही बिंदूच्या अंतरांची बेरीज समान का असते ते विद्यार्थ्यांना विचारा.



कागदाचा वापर करून कोनिक सेक्शन:

एक फिल्टर पेपर घ्या. त्याच्या आतमध्ये कोणताही एक बिंदू घ्या (F). हा बिंदू शक्यतो पेपरच्या कडांपासून 1 सेमी अंतरावर असावा. आता पेपरची अशा रीतीने घडी घाला की वर्तुळाचा परीघ F या बिंदूवर येईल. F वर येणाऱ्या परीघावरील बिंदूला p1 असे नाव द्या. परीघावरच p च्या जवळ एक बिंदू घेऊन त्याला p2 असे नाव द्या.(p2 हा p1 पासून अंदाजे 1 सेमी लांब असावा) आता कागदाला अशा रीतीने घडी घाला की ज्यामुळे p2 हा बिंदू हा बिंदू F या बिंदूवर येईल. अशा प्रकारे परीघावरील



ELLIPSE BY PAPER FOLDING

अनेक बिंदूंसाठी ही कृती पुन्हा पुन्हा करा. आपण घातलेल्या घड्यांचा कागदाच्या मध्यभागी एक सुंदर पॅटर्न मिळतो. F हा बिंदू व वर्तुळाचा केंद्रबिंदू हे दोन बिंदू म्हणजे इलिप्सचे केंद्रबिंदू (foci) असतील.

ड्रॉईंग पिन आणि दोऱ्याचा वापर करून हायपरबोला बनविणे:

सहा ड्रॉईंग पिना एका कार्डबोर्डच्या तुकड्यावर अशा प्रकारे लावा ज्यामुळे त्या एका सरळ रेषेत एकमेकांपासून समान अंतरावर

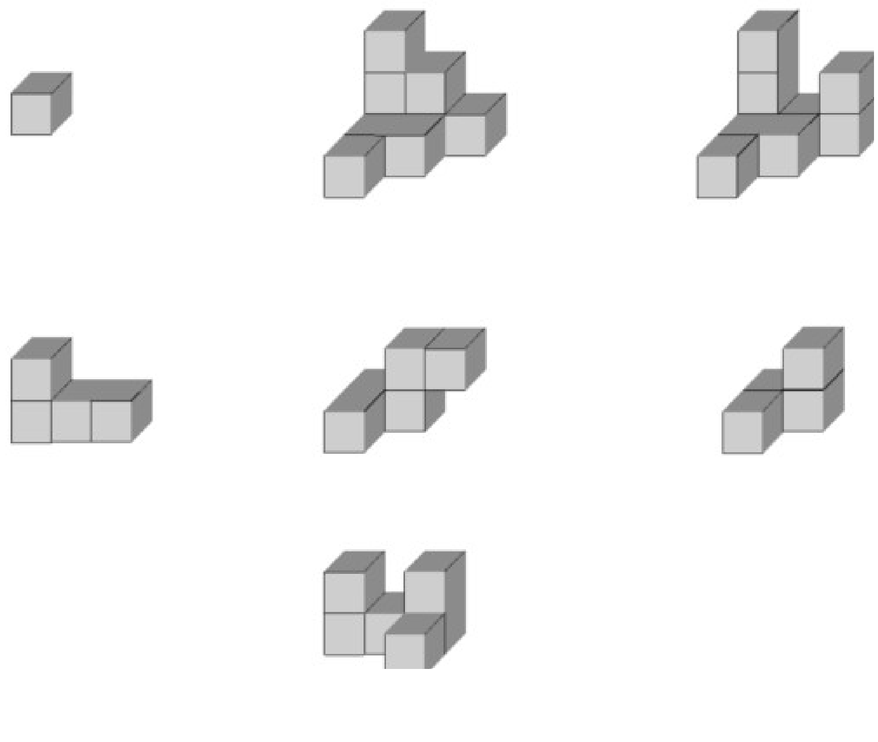
असतील. अशाच प्रकारे ड्रॉईंग पिनांची अजून एक रेषा बनवा. येथे दोन पिनांमधील अंतर हे पहिल्या रेषेवर असणाऱ्या दोन पिनांमधील अंतराइतकेच असेल. या दोन रेषा एकमेकींशी ठराविक कोन करत छेदलेल्या असतील. आता दोऱ्याचा वापर करून पहिल्या रेषेवरील पहिली ड्रॉईंग पिन, दुसऱ्या रेषेवरील शेवटच्या (सहाव्या) ड्रॉईंग पिनशी बांधा. दोन पिनांच्या मध्ये एक रेषाखंड तयार होईल. पहिल्या रेषेवरील दुसरी पिन, दुसऱ्या रेषेवरील पाचव्या पिनेशी बांधा. तुम्हाला हायपरबोला मिळेल.

पृष्ठफळ आणि घनफळ

शालेय अभ्यासक्रमात विद्यार्थ्यांना महत्वमापनाच्या पाठात घन (भरीव) भूमितीची ओळख केली जाते. दिलेल्या सुसम व ठोस वस्तूंचे घनफळ काढणे हे विद्यार्थ्यांकडून अपेक्षित असते. मात्र नेहमीच असे होताना दिसते की पृष्ठफळ आणि घनफळ यांची संकल्पना आकलन होत नाही किंवा विद्यार्थ्यांना या दोहोतील फरक कळू शकत नाही. या कृतीमध्ये वेगवेगळ्या प्रकारच्या तंतोतंत जुळणाऱ्या घनांपासून तयार केलेल्या निरनिराळ्या आकारांचे पृष्ठफळ व घनफळ काढून त्यांची तुलना करणे हे अपेक्षित असते. याच कृतीचा पुढचा भाग म्हणजे विद्यार्थ्यांचा घनांचा वापर करून वेगवेगळ्या अवकाशीय आकृत्यांचा शोध लावण्यास सांगता येतो.

साहित्य : आठ किंवा अधिक लाकडी प्लास्टीकचे घन किंवा याला पर्याय म्हणजे हे घन तयार करण्यासाठी चार्टपेपर.

CUBES WITH DIFFERENT SPACIAL ORIENTATIONS



कृती : 1 सेंटीमीटर किंवा 1 इंच (किंवा 1 एकक प्रमाण) घेतलेले 8 किंवा अधिक तंतोतंत जुळणारे ठोकळे घ्या. या प्रत्येक ठोकळ्याचे घनफळ 1 घन एकक आणि उभे पृष्ठफळ 1 चौरस एकक आणि एकुण पृष्ठफळ 6 चौरस एकक असेल. जेव्हा लाकडी किंवा प्लास्टीकचे घनाकृती ठोकळे नसतील तेव्हा चार्टपेपर वापरून ते बनवावेत. जर चार्टपेपर वापरत असाल तर सहा बाजूपैकी एक बाजू उघडी ठेवून ते घन बनवावेत. कारण पाच पृष्ठे असलेला असा घन आपल्याला मापनासाठी पुरेसा ठरतो.

आता या घनांपासून पुढील कृती कराव्यात.

- प्रथम विद्यार्थ्यांना सर्व घनांची पृष्ठफळे आणि घनफळे काढण्यास सांगावे.
- विद्यार्थ्यांना 5 घन देऊन ते वेगवेगळ्या प्रकारे जोडण्यास द्या. मात्र हे घन अशाप्रकारे जोडावे की ते एकमेकांना चिकटतील व त्यांची पृष्ठेही तंतोतंत जुळतील व एकमेकांना झाकतील. विद्यार्थ्यांना या प्रत्येक जुळणीत तयार झालेल्या संपूर्ण आकृतीचे एकुण पृष्ठफळ आणि घनफळ काढायला सांगा.
- आता हीच कृती 6, 7, 8 घन घेऊन पुन्हा करा. प्रत्येकवेळी मिळणाऱ्या आकृतीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.
- प्रत्येकवेळी मांडणी करताना विद्यार्थ्यांना वेगवेगळ्या ठोस आकृत्यांची रेषाकृती व वेगवेगळ्या बाजूनी दिसणारे नकाशे काढायला सांगा.
- त्यांनी काढलेल्या रेषाकृती व नकाशांवरून, इतर विद्यार्थ्यांना दिलेल्या ठोकळ्यांची तशी मांडणी करायला सांगा.

अस्ट्रोलोब

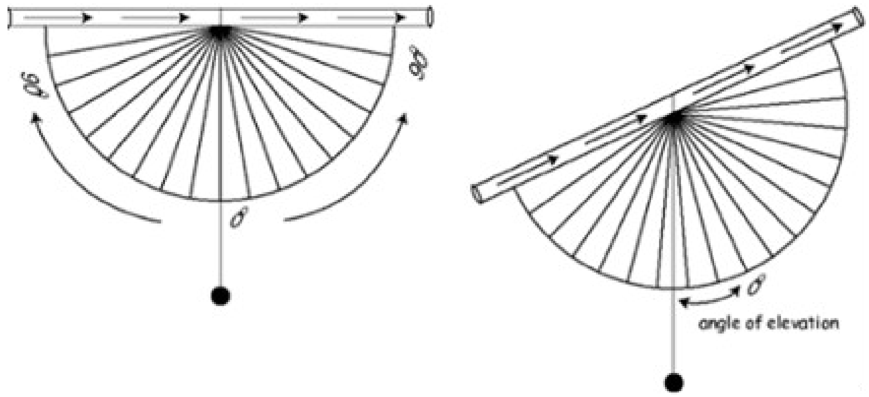
साहित्यः चार्ट पेपर, पेन, कटर,दोरीचा तुकडा, दोरीला बांधण्यासाठी छोटे परंतु वजनदार साधन (उदा. छोटा चेंडू), कागदाची पोकळ नळी किंवा पडद्याचा रॉड (अंदाजे 10 इंच लांबीचा).

तारे आणि ग्रह यांधील कोनीय अंतरे मोजण्यासाठी पूर्वी खगोलशास्त्रामध्ये अस्ट्रोलोब हे साधन वापरले जात असे. याचा वापर डोंगर, झाडे, इमारती इत्यादी वस्तूंनी जमिनीशी केलेला कोन मोजण्यासही होतो.

कृतीः अस्ट्रोलोब बनविण्यासाठी चार्ट पेपेरला अर्धवर्तुळाकृती कापा. या अर्धवर्तुळाची त्रिज्या अंदाजे 5 इंच असेल. यासाठी कात्रीचा वापर करा. कोनमापक वापरून अर्धवर्तुळावर 0 अंश ते 180 अंश कोनाच्या खूणा करा. एका आयताकृती चार्टपेपरची गुंडाळी करून पोकळ नळी बनवा. ती सुटू नये यासाठी गोंदीचा वापर करून ती चिकटवून टाका. याऐवजी तुम्ही पडद्याचा रॉडही वापरू शकता. तयार केलेली पोकळ नळी किंवा पडद्याचा रॉड अर्धवर्तुळाच्या व्यासावर चिकटवा. अर्धवर्तुळाच्या केंद्रापासून (जे पोकळ नळीचेही केंद्र असेल) दोरीला बांधलेला चेंडू लटकवा.

उंच वस्तूंने जमिनीशी केलेला कोन मोजण्यासाठी त्या वस्तूच्या वरच्या टोकाकडे आपल्या पोकळ नळीतून पहा. दोरीने अर्धवर्तुळावरील 90 अंश कोनाच्या रेषेशी केलेला कोन हा वस्तूने जमिनीशी केलेल्या कोनाइतकाच असेल. जर हा कोन θ एवढा असेल तर आपल्या डोळ्याच्या समांतर रेषेच्या वर येणारी वस्तूची उंची काढण्यासाठी वस्तूच्या अंतराला $\tan\theta$ ने गुणा.

ASTROLABE



हिप्सोमिटर

साहित्यः कार्डबोर्ड, आलेख कागद, चार्टपेपरची नळी किंवा पडद्याचा रॉड (अंदाजे 10 इंच लांबीचा), दोरी आणि दोरीला बांधण्यासाठी छोटे परंतु वजनदार साधन (उदा. छोटा चेंडू).

कृतीः आपण पूर्वी पाहिलेल्या असट्रोलोब या साधनाचे हे अधिक विस्तृत स्वरूप आहे. यामध्ये वस्तूंची उंची मोजण्यासाठी त्रिकोणांची समानता हा गुणधर्म वापरला जातो.

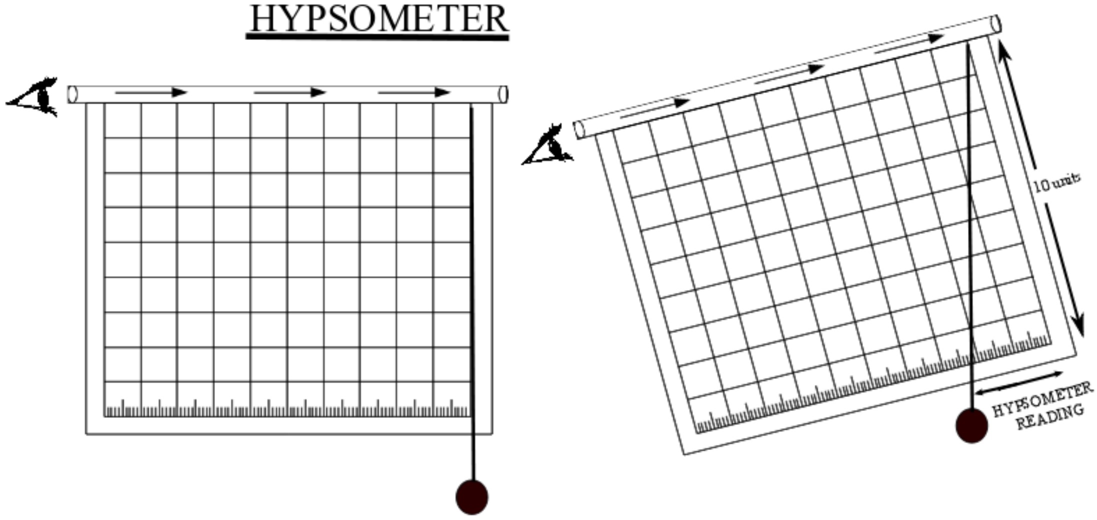
हिप्सोमिटर बनविण्यासाठी प्रथम 10 इंच × 11 इंच असा आयताकृती कार्डपेपर कापून घ्या. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 10 इंच × 10 इंच एवढ्या भागामध्ये 1-1 सेमी अंतरावर उभ्या आडव्या रेषा काढून घ्या. याऐवजी तुम्ही कार्डपेपरवर आलेख कागद चिकटवू शकता. कार्डपेपरवरील पहिल्या ओळीच्या वर एक पोकळ नळी चिकटवा. दोऱ्याला छोटा चेंडू बांधून तो दोरा कार्डपेपरच्यावर उजव्या कोपऱ्यात पोकळ नळीला बांधा. आता हा हिप्सोमिटर वापरायचा कसा ते पाहू....

हिप्सोमिटर वापरताना तो जमिनीला समांतर असा पकडा. यामुळे दोरा जमिनीशी काटकोनात राहील. आता, ज्या वस्तूची उंची मोजायची आहे तिच्या सर्वात वरील भागाकडे पोकळ नळीतून पहा. आता दोरा आलेख कागदाच्या सर्वात खालच्या रेषेला कोणत्या बिंदूत छेदतो ते पहून त्याची नोंद करून ठेवा. आपण या नोंद केलेल्या संख्येला x असे म्हणू. आता पुढील सूत्र वापरा.

उंची = x/10 × वस्तूचे हिप्सोमिटर पासूनचे अंतर

या सूत्राने आपल्याला वस्तूची आपल्या डोळयांच्या पातळीच्या वरची उंची मिळेल. यामध्ये आपली स्वतःची उंची मिळविली तर त्या वस्तूची जमिनीपासूनची उंची आपल्याला मिळेल.

HYPSOMETER



रूपांतर तक्ता

माध्यमिक शाळांच्या विद्यार्थ्यांना बहुतकरून तापमानाच्या मोजणीत सेल्सिअसचे फॅरहनाइट व फॅरहनाइटचे सेल्सिअसमध्ये रूपांतर करावे लागते. एका परिमाणातून दुसऱ्या परिमाणात रूपांतर करणे हे तक्ता तयार करण्यामागील ध्येय आहे.

साहित्य : आलेख कागद, पेन किंवा पेन्सिल.

कृती : विद्यार्थ्यांना आलेख कागदावर X व Y अक्षावर वेगवेगळी प्रमाणे घ्यायला सांगा. त्यानंतर F च्या तीन वेगवेगळ्या किमती घेऊन त्या पुढील सूत्रात घालून C च्या मिळणाऱ्या किमती काढायला सांगा.

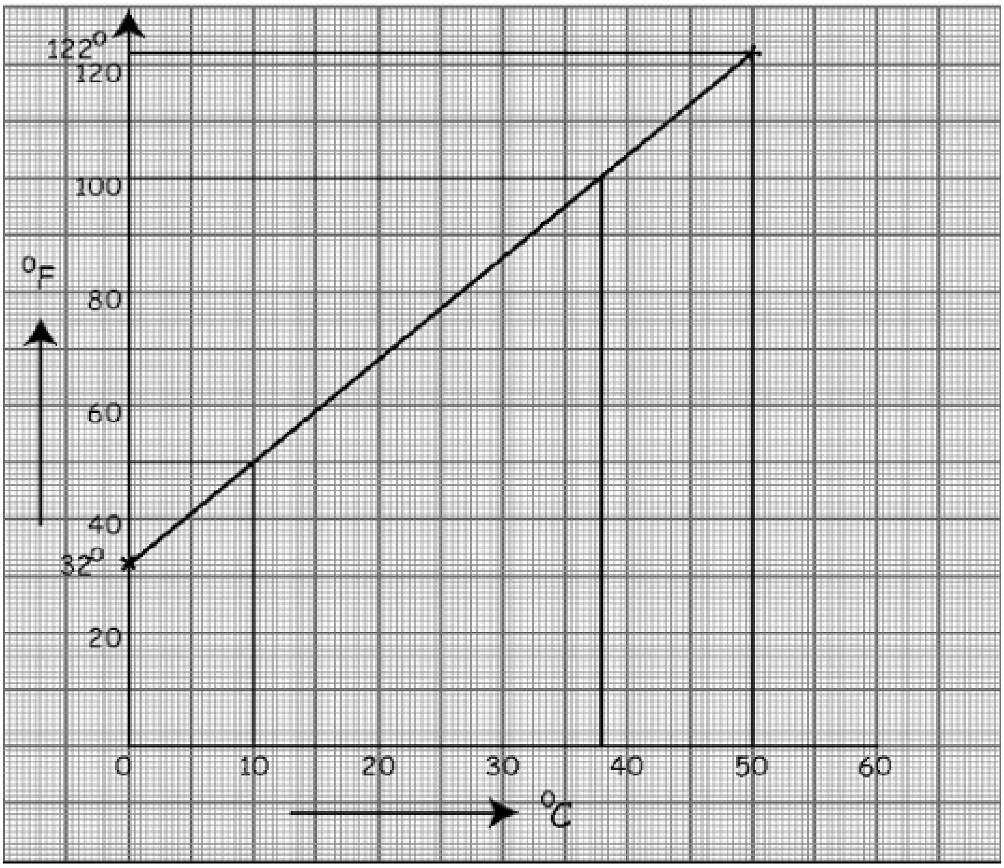
$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

आता C च्या किमती x निर्देशक आणि F च्या किमती y निर्देशक घेऊन आलेख कागदावर तीन बिंदू स्थापून घ्या. हे तीन बिंदू एकरेषीय आहेत का ते विद्यार्थ्यांना विचारा. या तीनही बिंदूतून एक सरळ रेषा काढा.

आता विद्यार्थ्यांना विचारा, गोठणबिंदू व उत्कलन बिंदू यांचे मापन सेल्सिअसमध्ये व फॅरहनाइटमध्ये योग्य दर्शवितात का? तसेच त्यांना, ही काढलेली रेषा सेल्सिअसचे फॅरहनाइटमध्ये रूपांतर करणारा तक्ता म्हणून वापरू शकतो का? आणि हे असे का घडते? हे ही विचारा. त्यांच्या प्रतिसादावर चर्चा करा.

प्रस्तूत तक्ता हा रेषीय समीकरणांची चर्चा करण्यास संधी निर्माण करून देतो. मग अशाप्रकारच्या तक्त्याद्वारे इंचाचे सेंटीमीटरमध्ये रूपांतरण करण्याचा तक्ता विद्यार्थ्यांना शोधण्यास सांगा. तसेच मुलाचे वय दिले असता त्याच्या वडिलांचे वय काढण्याचा आणि याप्रकारे अशा अनेक रूपांतरणाचे तक्ते विद्यार्थ्यांना शोधण्यास सांगा.

CONVERSION CHART



नेपिअरच्या पट्ट्या

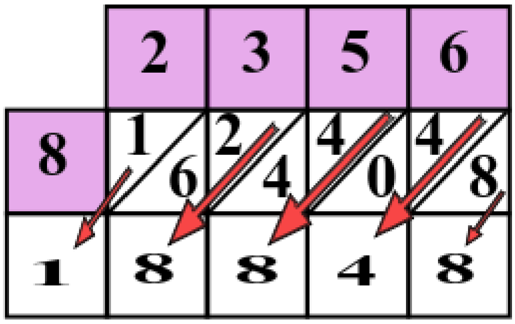
लॉगॅरिथम सारणीचा जनक जॉन नेपिअर (१५५०-१६१७) याने गुणाकर करण्यासाठी एक सोपे तंत्र विकसित केले. नेपिअरच्या पट्ट्या म्हणून त्या ओळखल्या जातात. या पट्ट्यांचा वापर करून मोठ्यात मोठ्या संख्येला एक अंकी संख्येने गुणता येते. ज्यामुळे बेरजेच्या स्वरूपात गुणाकार करण्याची पद्धती टाळली जाते. पाहूया तर कशा बनवितात या नेपिअरच्या पट्ट्या......

साहित्य : कार्डबोर्ड किंवा चार्ट पेपर, स्केट्च पेन, कात्री.

कृती :

प्रथम एका चार्ट पेपरवर १० इंच लांब व ९ इंच रूंद आयत तयार करून घ्या. त्यावर १ इंच अंतरावर उभ्या व आडव्या रेघा ओढून घ्या. आता चित्रात दाखविल्याप्रमाणे (प्रत्येक छोट्या चौरसाचा एक कर्ण जोडणाऱ्या) तिरक्या रेघा मारून घ्या.

समजा आपल्याला २३५६ ला ८ ने गुणायचे आहे, तर प्रथम २,३,५,६च्या पट्ट्या एकमेकींना जोडून उभ्या कराव्यात. आता प्रत्येक पट्टीच्या ८ व्या ओळीमधील अंक घ्या. त्याच्या (तिरक्या) कर्णाकडील अंकांची बेरीज करा. बेरीज जर १० पेक्षा आल्यास हातचा पुढील स्थानात घ्या.याप्रमाणे तिरकी बेरीज करून उत्तर काढा. जसे,



म्हणून 2356 ला 8 ने गुणल्यास गुणाकार 18848 येतो. आता तुम्ही 10472 ला 9 ने गुणण्यासाठी या पट्ट्यांचा वापर करून उत्तर काढा. नेहमीच्या पद्धतीने गुणाकार करून पडताळा घ्या. याप्रमाणे एक अंकी संख्येने गुणण्यास या नेपिअरच्या पट्ट्या उपयोगी पडतात.

वास्तविक पाहता ही पद्धत प्राचिन भारतीय गणिती शास्त्रज्ञांनी दाखविलेल्या " गणेश दैवज्ञ " पद्धतीसारखी आहे. त्यापद्धतीतही कर्णावरील संख्यांची तिरकी बेरीज केली जात असे. या नेपिअरच्या पट्ट्या बारकाईने पाहिल्यास असे दिसून येते की या पट्ट्या म्हणजे 1 ते 9 पर्यंतचे पाढेच आहेत. फक्त प्रत्येक पाढ्यात येणाऱ्या संख्येमधील दशक व एकक स्थानचे अंक निरनिराळे (तिरकस) मांडले जातात. येथे मात्र नेपिअरच्या पट्ट्या वापरताना आपल्याला पाढे लक्षात ठेवण्याची गरज उरत नाही. फक्त तिरक्या अंकांची बेरीज करावी. हातचा असेल तर पुढील स्थानात द्यावा आणि झाले उत्तर तयार.....!

NAPIER'S BONES

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/6
7	0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

आच्छादित प्लॅटॉनिक सॉलिड

प्लॉटॉनिक सॉलिड हे असे घन असतात की ज्यांचे सर्व पृष्ठभाग सुसम बहुभुजाकृती असतात. त्याची सर्व पृष्ठे समान असतात म्हणजे त्यांची लांबी व आकार समान असतो. शिवाय त्यांच्या सर्व कडांची लांबीही समान असते. हे प्लॉटॉनिक सॉलिड सुसम टेट्राहायड्रा असतात.

अतिशय प्रचलित प्लॉटॉनिक सॉलिड म्हणजे "घन" होय. त्याला सहा पृष्ठे असून सर्व पृष्ठे समान चौरस असतात. दुसरा एक प्लॉटॉनिक सॉलिड म्हणजे सुसम टेट्राहायड्रोन ज्याला चार पृष्ठे असून सर्व पृष्ठे हे सुसम समभुज त्रिकोण असतात. असे किती प्लॉटॉनिक सॉलिड आपणास बनविता येतील? भूमितीचे हे विश्वसत्य आहे की फक्त पाचच प्लॉटॉनिक सॉलिड आपणास बनविता येतील. घन आणि टेट्राहायड्रोन सोडला तर "ऑक्टाहायड्रोन" ज्याला प्रत्येक समभुज त्रिकोण असणारी 8 पृष्ठे असतात तसेच "डोडेकाहायड्रोन" ज्याला 12 पृष्ठे असतात आणि सर्व पंचकोन आणि "आयकोसाहायड्रोन" ज्याला 20 पृष्ठे असतात ते सर्व समभुज त्रिकोणांचे बनलेले असतात.

वरील सत्य हे ग्रीक तत्ववेत्ता "प्लेटो" याने 2000 वर्षापूर्वी मांडले. त्याच्या नावावरूनच हे भरीव (सॉलिड) ओळखले जाऊ लागले. प्लेटोचा असा विश्वास होता की स्वर्गाची रचना समजण्यासाठी या सॉलिडचा उपयोग होईल. प्लेटोच्या या गोष्टीवर तथाकथीत खगोलशास्त्रज्ञ आणि 17 व्या शतकातील भौतिकशास्त्रज्ञ केपलर याचाही विश्वास होता.

साहित्य : थोडे कडक असणारे स्ट्रॉ, गोल पेपरक्लिप्स, सुई व दोरा.

कृती : प्रथम समान लांबी व आपणास जो सॉलिड तयार करावयाचा आहे तेवढे स्टॉ घेऊन ते प्लॉटॉनिक सॉलिडच्या आकारात जोडा. येथे आपणास हव्या त्या मापाचा कोन करता येईल. असे सर्व जोड गोल पेपरक्लिपने जोडा ज्यामुळे ते हवे तसे फिरविता येईल. स्टॉच्या तोंडाजवळ दोन यु आकाराच्या स्टॉ घाला. थोडे घट्ट होण्यासाठी ही बाजू उघडी ठेवा. हे सर्व सॉलिड एकमेकांत घट्ट बसलेले किंवा झाकत असे पोकळ असावेत. असेच एक संयोजन म्हणजे आतल्या प्लॉटॉनिक सॉलिड कोपरा बाहेरील सॉलिडच्या कडेला किंवा बिंदूला स्पर्श करू शकेल असा असावा. शिवाय अशा संयोजनांचा क्रम, ज्यामध्ये 5 प्लॅटॉनिक सॉलिड झाकले आहे. ते फारच आकर्षित दिसतात.

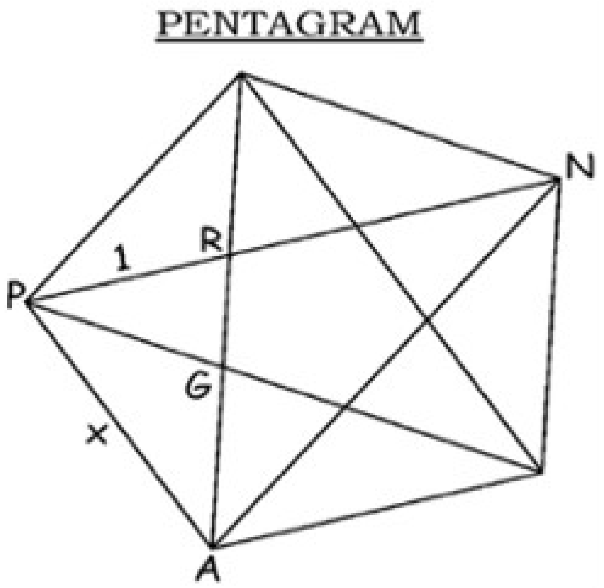
या क्रमिकेमध्ये सर्वात बाहेरील सॉलिड हा डोडेकाहायड्रोन असतो. 12 पृष्ठे असणाऱ्या या डोडेकाहायड्रोनचे प्रत्येक पृष्ठ हे सुसम पंचकोन असतो. एका पृष्ठाला दोन विरूद्ध बाजूचे कोपरे जोडलेले असले तर *घन* तयार होतो जो डोडेट्राहायड्रोनच्या पूर्णपणे आत झाकलेला असतो. या डोडेकाहायड्रोनच्या कडेची लांबी ही त्या घनाच्या कडेच्या लांबीच्या 0.618 पट असते. हे दोन झाकलेले सॉलिड स्टॉ व पेपरक्लिपने बनविले जाऊ शकतात.

आता या घनाच्या प्रत्येक पृष्ठचा एक कर्ण जोडल्यास आपणास "टेट्राहायड्रोन" मिळतो. या टेट्राहायड्रोनच्या कडेची लांबी ही त्या घनाच्या कडेच्या लांबीच्या √2 पट असते. हे झाकलेले सॉलिडही स्ट्रॉ व पेन्सिलने बनविले जातात. आता या टेट्राहायड्रोनच्या प्रत्येक कडेचा मध्यबिंदू जोडल्यास ऑक्टाहायड्रोन तयार होतो. हे संयोजन तयार करण्यासाठी प्रथम टेट्राहायड्रोन तयार करावे व नंतर त्याच्या प्रत्येक कडेचे मध्याबिंदू जोडावे लागतात म्हणजेच टेट्राहायड्रोनच्या कडे इतक्या लांबीची जी स्टॉ असते तीच्या निम्म्या लांबीची स्टॉ घ्या. आता या निम्म्या भआगातून सुई व दोरा घाला तेथे एक लहानसा टाका घाला. आता हाच सुईदोरा त्याच्या विरूद्धबाजूच्या स्टॉच्या मध्यबिंदूतून जाऊ द्या. आता अशा धाग्याची गाठ केल्यास आपणास ऑक्टाहायड्रोनची एक कडा

मिळेल. अशाप्रकारे इतर सर्वकडा सुई व दोऱ्याने तयार करा. या ऑक्टाहायड्रोनच्या आतील भागात आयकोसाहायड्रोन घट्ट बसलेला दिसून येतो. आता ऑक्टाहायड्रोनची प्रत्येक कडा 1:1.618 या सुवर्ण गुणोत्तरात विभागलेली असेल तिथे खुण करा. हे सर्व खुणा केलेले चक्रिय प्रकारच्या संम्मुख बाजूचे बिंदू जोडा. तुम्हाला आयकोसाहायड्रोन मिळेल. हे स्टॉने बनविण्यासाठी प्रथम स्ट्रॉ व पेपरक्लिपने ऑक्टाहायड्रोन बनवा. आता ऑक्टाहायड्रोनच्या कडेच्या --- पट लांबीची (थोडी कमी असेल तर अधिक निट फिट्ट बसेल) अशी स्ट्रॉ घ्या. आता त्यावर ऑक्टाहायड्रोनला 1:1.618 या सुवर्ण गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदूजवळ खुण करा. संमुख किंवा विरूद्धबाजू वरील हे बिंदू शिरोबिंदूपासून समान अंतरावर आयकोसाहायड्रोन तयार होईल. यासाठी थोडा धीर धरायला हवा. मात्र तयार होणारी संपूर्ण प्रतिकृती अतिशय आकर्षक होईल.

पेंन्टाग्रॅम आणि सुवर्ण गुणोत्तर

पेंन्टाग्रॅम हा एक पंचकोन असून त्याचे सर्व शिरोबिंदू आतून रेषाखंडाने जोडल्यास एक तारकाकृती मिळते. पेंन्टाग्रॅम हा एक असाच सुंदर सममित असून त्यात मिळणारी ही तारकाकृती ही ऐतिहासिक संस्कृतीतील एखाद्या प्रभावी चिन्हासारखीच दिसते.



वरील आकृतीत दाखविला पेंन्टाग्रॅम पाहून विद्यार्थ्यांना तीचे नीट निरिक्षण करावयास सांगा आणि पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्यायला सांगा.

1) ΔAPR शी समरूप असलेला त्रिकोण कोणता आहे?

2) ΔAPR शी एकरूप असलेले किती त्रिकोण तुम्हाला शोधता येतील? त्यांची नावे सांगा.

3) प्रश्नक्रमांक 1 मध्ये दिलेल्या त्रिकोणाशी किती एकरूप त्रिकोण तुम्ही शोधू शकता? त्यांची नावे लिहा

4) आकृतीतील X ची किंमत redian व दशांश स्वरुपात काढा.

5) 1/X आणि X चा वर्ग यांची किंमत काढा. त्यातून तुम्हाला काय दिसते? X चे redian मध्ये रूपांतर करताना त्यात काही संबंध दिसतो का?

6) Fibonacci क्रमिकेबाबत तुम्ही काही सांगू शकता का? ही क्रमिका 1 ने सुरू होते, दुसरे पदही 1 असते त्यापुढील

पद मिळविण्यासाठी मागिल दोन पदांची बेरीज करावी म्हणजेच तिसरे पद 2 येईल व चौथे पद 3 असेल. याप्रमाणेच ही क्रमिका चाढत जाईल. आता आपण असे मानले की प्रत्येकवेळी क्रमिकेत वाढ होत असताना मिळणारी पुढची संख्यादेखिल विशिष्ट गुणोत्तरात मोठी होत आहे. मग हे गुणोत्तर तुम्ही शोधू शकता का? काय असेल ते गुणोत्तर? मात्र प्रत्येकवेळी हाच नियम वापरा की, येणारी पुढील संख्या ही मागच्या क्रमिक दोन संख्यांच्या बेरजेएवढी असते.

पट्टी व कंपासच्या सहाय्याने सुसम पंचकोन काढणे शक्य नसते म्हणूनच पेंन्टाग्रॅमने पंचकोन काढणे शक्य होते कसे ते पाहूया....

साहित्य : 2 इंच रूंदीच्या पातळ कागदाची पट्टी, कोरा कागद व पेन.

कृती : प्रथम 2 इंच रूदीच्या पातळ कागदाची 1 फुट लांबी असणारी पट्टी घ्या. आता या पट्टीला त्याची रूंदी न बदलता गाठ मारा. आता ती गाठ एखाद्या कोटाच्या टायप्रमाणे दिसेल याप्रमाणे पसरा. आपल्याला पंचकोन मिळेल. या पंचकोनाचे सर्व कर्ण काढा आपल्याला पेंन्टाग्रॅम मिळेल.

आता आपण सुवर्ण गुणोत्तराकडे वळू. या पेंन्टाग्रॅमच्या आतमध्येच आपल्याला सुवर्ण गुणोत्तर मिळेल. वरील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे पेंन्टाग्रॅममध्ये गुणोत्तरा X : 1 आहे. येथे X व 1 या Δ PRA या समद्विभुज त्रिकोणाच्या असमान बाजूंची लांबी आहे.

जर तुम्ही काळजीपूर्वक हा पेंन्टाग्रॅम पाहीलात तर Δ PRA च्या आकाराशी आणि लांबीशी समान असे 10 त्रिकोण आपणास दिसून येतील. Δ PGR हा लहान आहे मात्र तो Δ PAR शी समरूप आहे. तसेच इतरही पाच मोठे त्रिकोण आहेत.

या सर्व समद्विभुज त्रिकोणांच्या असमान बाजू ह्या सुवर्ण गुणोत्तरात आहेत असे दिसून येते. या गुणधर्मावरून आपण सुवर्ण गुणोत्तराची किंमत काढू शकतो. सुवर्ण गुणोत्तराची अंदाचे किंमत 1.618 अशी असते. यात आणखी एक असाधारण गुणघर्म दिसून येतो तो असा की, सुवर्ण गुणोत्तराचा व्यस्त हा 1 मधून वजा केल्यास मिळणाऱ्या किमती एवढा असतो. (जसे $1/x = 1-x$) शिवाय अजून एक विलक्षण गुणधर्म दिसतो की, या सुवर्ण गुणोत्तराचा वर्ग हा त्या गुणोत्तरापेक्षा 1 ने अधिक असतो.

सुवर्ण आयत हा एक असा आयत आहे की ज्याच्या बाजू सुवर्ण गुणोत्तरात असतात. जेव्हा असे तीन सुवर्ण आयत एकमेकांना काटकोन आणि मध्यबिंदूजवळ छेदतात तेव्हा हे सर्व कोपरे जोडल्यास Icosahedron मिळतो. यावेळी मिळणाऱ्या दोन क्रमित संख्याचे गुणोत्तर हे सुवर्ण गुणोत्तराजवळ एकवटलेले दिसते. या सुवर्ण गुणोत्तराचा वेगवेगळया कला, स्थापत्यशास्त्र, नैसर्गिक गोष्टी तसेच सुसम दशकोन इत्यादींशी संबंध असलेला दिसून येतो.

भूमितीद्वारे म.सा.वि. काढणे.

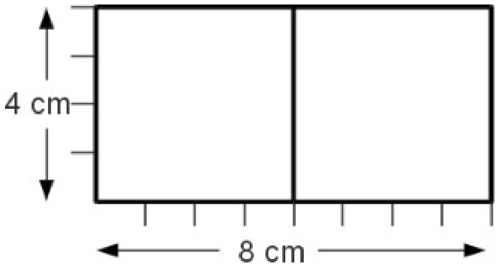
म.सा.वि. (महत्तम सामाईक विभाजक) म्हणजे काय तर दिलेल्या संख्यांमधील सामाईक अवयवांमधील मोठ्यात मोठी सामाईक विभाज्य संख्या होय. येथे मात्र आपण मसावि हा गणन करून न काढता भूमितीद्वारे कसा काढावा ते पाहूया.

साहित्य : एक कोरा कागद, पट्टी व पेन्सिल.

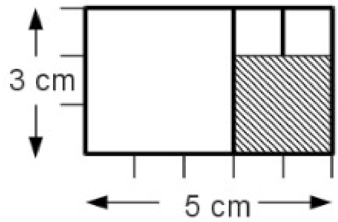
कृती :

समजा आपणास दोन पूर्णांक a व b यांचा मसावि काढायचा आहे. प्रथम एका कागदावर लांबी a व रूंदी b असणारा एक

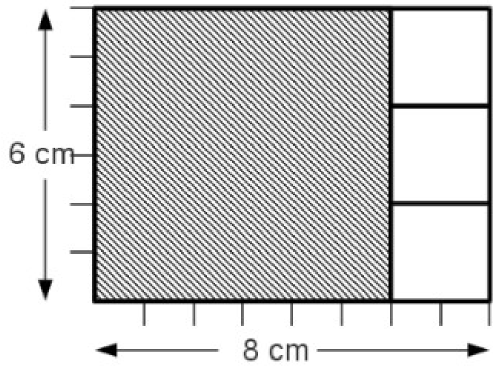
आयत आखून घेऊ (जर a व b या फारच मोठ्या संख्या असतील तर तीचे a/2 व b/2 किंवा अशा समान प्रमाणात भाग करून घेऊ. आता या लांबी a व रूंदी b असणाऱ्या आयतामधून मोठ्यात मोठी बाजू असणारा चौरस आखून घ्या. येथे जर a ही b पेक्षा मोठी संख्या असेल तर त्या चौरसाची बाजू b असेल. हा चौरस आखून झाल्यावर उरलेला भाग हा b आणि a-b बाजू असणारा आयत मिळेल. आता पून्हा या मिळालेल्या आयतातून मोठ्यात मोठा चौरस आखून घ्या. ही कृती अशीच चालू ठेवा जोपर्यंत उरलेला भाग हा आयताऐवजी चौरस मिळेल. आता या शेवटी मिळालेल्या चौरसाची बाजू म्हणजे दिलेल्या a व b पूर्णांकाचा मसावि होय.



GCD of 8, 4 is 4



GCD of 5,3 is 1



GCD of 8, 6 is 2

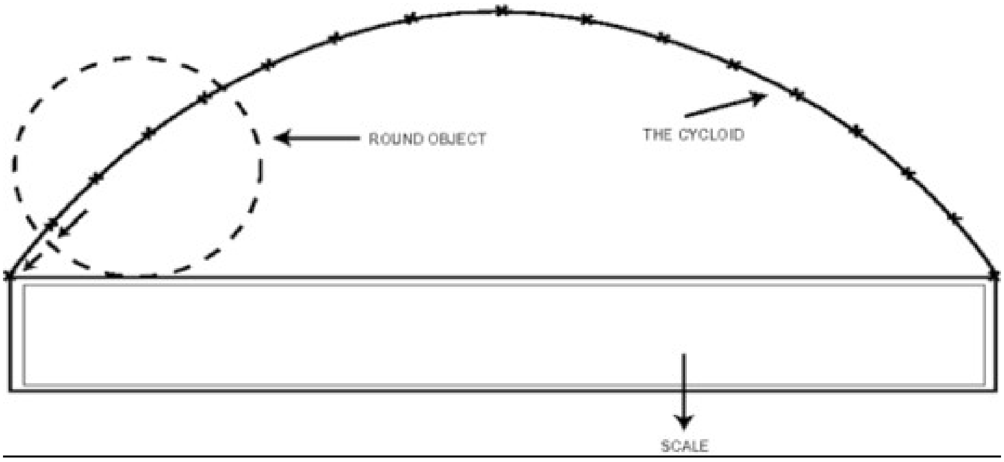
भूमितीतील वक्ररेषा

साहित्य: पट्टी, कॅरमचा स्ट्रायकर, पेन, थोड्याश्या मऊ असलेल्या स्टिलच्या वायर्स.

निसर्गामध्ये आपल्याला अनेक प्रकारच्या आकर्षक वक्ररेषा दिसून येतात. काही सोपी साधने वापरून आपण या वक्ररेषा काढू शकतो. पुढे अशाच काही वक्र रेषांची उदाहरणे दिली आहेत.

सायक्लॉईड: हा कर्व्ह काढण्यासाठी कागदाच्या मोठ्या तुकड्यावर एक पट्टी ठेवा आणि चिकटपट्टी वापरून ती कागदावर चिकटवून टाका. कागदावर पेन्सिलीने पट्टीची एक बाजू आखून घ्या. कॅरमच्या स्ट्रायकरच्या परिघावर पेनाने एक बिंदू काढून घ्या. हा स्ट्रायकर कागदावर अशा प्रकारे ठेवा की ज्यामुळे आपण स्ट्रायकरवर काढलेला बिंदू पट्टीला स्पर्श करेल. आता स्ट्रायकर घसरू न देता (without sliding) पट्टीच्या कडेवरून 2 सेमीने पुढे रोल करा. आपण स्ट्रायकरवर पूर्वी मार्क केलेल्या बिंदूच्या बरोबर खाली कागदावर एक बिंदू काढा. हीच क्रिया पुन्हा पुन्हा करा. आपल्याला सायक्लॉईड तयार झालेला दिसेल.

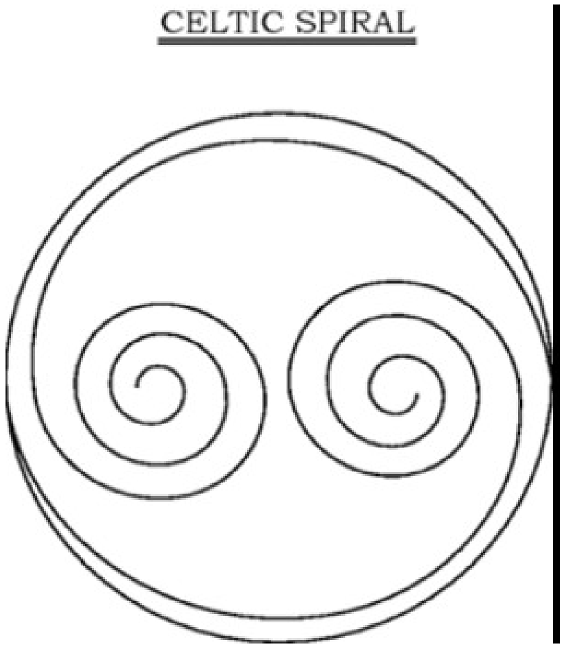
A CYCLOID



सेलटीक स्पायरल:

हे स्पायरल सेल्ट या युरोपमधील जमातींनी त्यांच्या कलेमध्ये वापरलेले दिसते. हे स्पायरल काढण्यासाठी 8 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. थोड्याश्या फिकट पेन्सिलीने वर्तुळाचा व्यास काढून घ्या. याव्यासावर 1- 1 सेमी अंतरावर खूणा करून घ्या. आता व्यासाचे 16 भाग झालेले दिसतील. आता आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे वक्ररेषा काढायचा प्रयत्न करा. दोन्ही वक्ररेषा घड्याळाच्या दिशेने काढलेल्या आहेत. एकाची सुरुवात व्यासाच्या वरच्या बाजूने तर दुसऱ्याची सुरुवात व्यासाच्या खालच्या बाजूने झालेली आहे

CELTIC SPIRAL



साबणाची फिल्म

साहित्यःएक बादली पाणी, साबण पावडर,स्टीलच्या थोड्या मऊ वायर्स.

गणिताच्या अभ्यासामध्ये सोप फिल्म हे एक आकर्षक साधन ठरते. साबणाच्या द्रवणाचा वापर करुन आपण वेगवेगळ्या तीन प्रतलिय आकृत्या बनवू शकतो. प्रत्यक्षामध्ये अशा आकृत्यांची कल्पना करुन त्या बनविणे थोडे कठीण ठरते. साबणाचे द्रावण बनविण्यासाठी अर्धी बादलीपाणी घेऊन त्यात दोन मूठ भरुन साबण पावडर टाका. जर तुमच्या परिसरातील पाणी कठीण असेल तर तुम्हाला ऊर्ध्वपातन केलेले पाणी वापरावे लागेल. त्यात 20 ते 30 मिली ग्लिसरीन टाका. यामुळे फिल्म थोडी मजबूत बनेल.

आता स्टीलच्या थोड्या मऊ वायर्स घेऊन त्यांच्या फ्रेम्स बनवा. वायरपासून बनविलेली दोन छोटी छोटी वर्तुळे एकमेकांवर ठेवल्यास आणि ती पाण्यात बुडविल्यास त्या दोघांमध्ये सोप फिल्म तयार होते. ही दोन वर्तुळे एकमेकांपासून लांब ओढल्यास catenoid ही तीन प्रतलीय आकृती तयार होते. घनाच्या (ठोकळयाच्या) आकाराची फिल्म द्रावणात बुडवून हळूवारपणे बाहेर काढल्यास आपल्याला पृष्ठभागांचा एक आकृतीबंध मिळतो. या आकृतीबंधाच्या मध्यावर एक घन तयार झालेला दिसतो. हा घन आपल्या फ्रेमच्या कडांना प्रतलांनी चिकटलेला असतो. ही आकृती म्हणजे चार प्रतलीय हायपरक्युब या आकृतीचर तीन प्रतलातील प्रक्षेपण(projection) आहे.

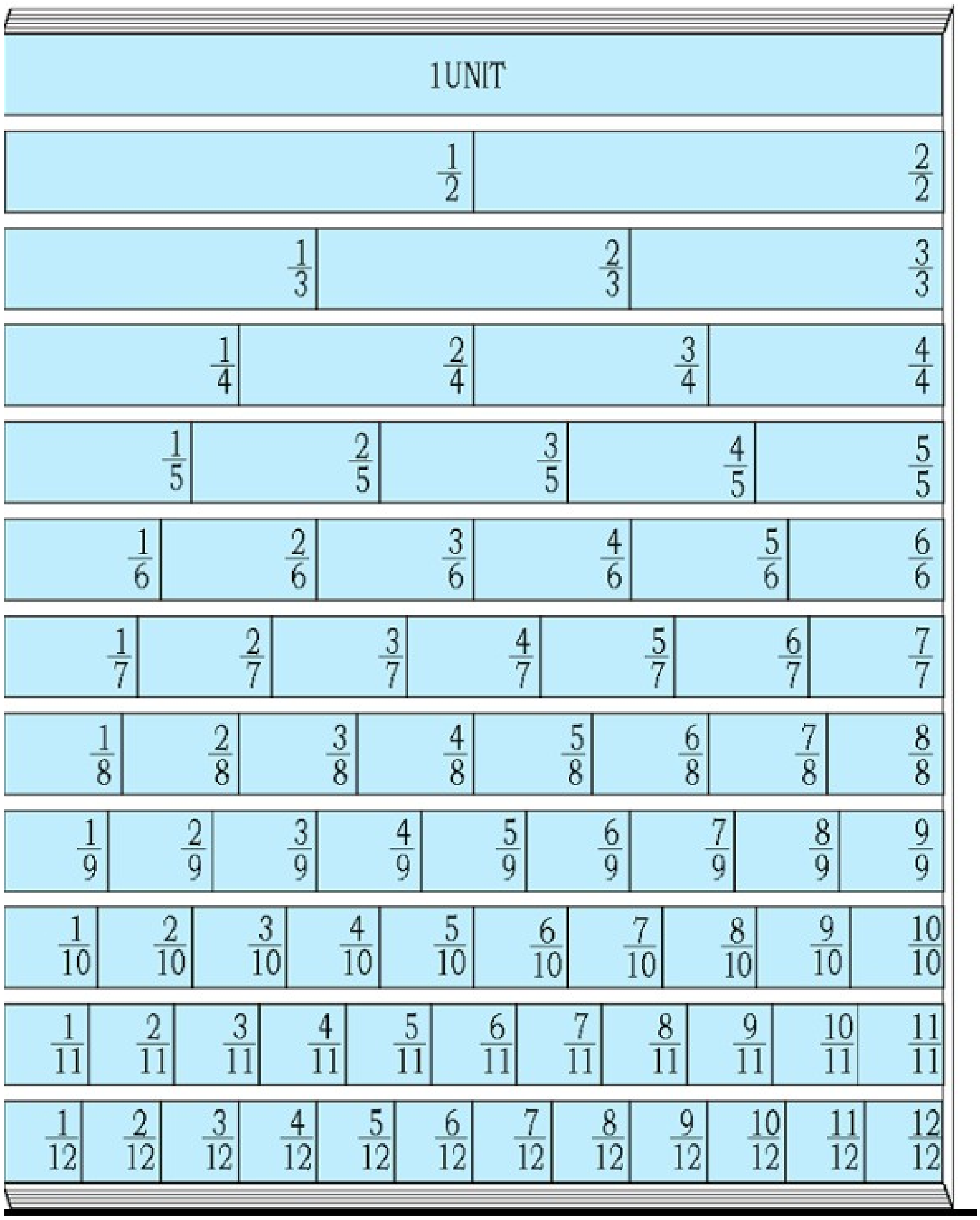
टेट्राहेड्रॉन(tetrahedron) च्या आकारातील फ्रेम साबणाच्या द्रावणात बुडविल्यास अशाच प्रकारे फ्रेमच्या मध्यावर (केंद्राकडे) साबणाच्या फ्रेमचा छोटासा टेट्राहेड्रॉन तयार झालेला दिसतो. या टेट्राहेड्रॉनचे पृष्ठभाग वक्र झालेले दिसून येतात. एक्रॅलिक किंवा काचेच्या दोन समांतर व पारदर्शक पट्ट्यांमध्ये साबणाचा फुगा तयार केल्यास त्याचे दंडगोलात (cylinder) रुपांतर होते. जर या दोन पट्ट्यांमध्ये एकापेक्षा जास्त साबचे फुगे असतील तर काय होईल...?

अपूर्णांक तक्ता

साहित्यः प्लायवूड किंवा कार्डबोर्ड, चार्ट पेपर, दोरा, लहान चेंडू.

एका पूर्णाचा अपूर्णांक या संकल्पनेची प्राथमिक शाळामध्ये ओळख करून दिली जाते.विद्यार्थ्यांना अपूर्णांकांची संकल्पना आणि अंश व छेद यांचा अर्थ समजायला कठीण जातो. यासाठी अपूर्णांक तक्ता हे एक उपयुक्त शैक्षणिक साधन ठरते.

FRACTION CHART



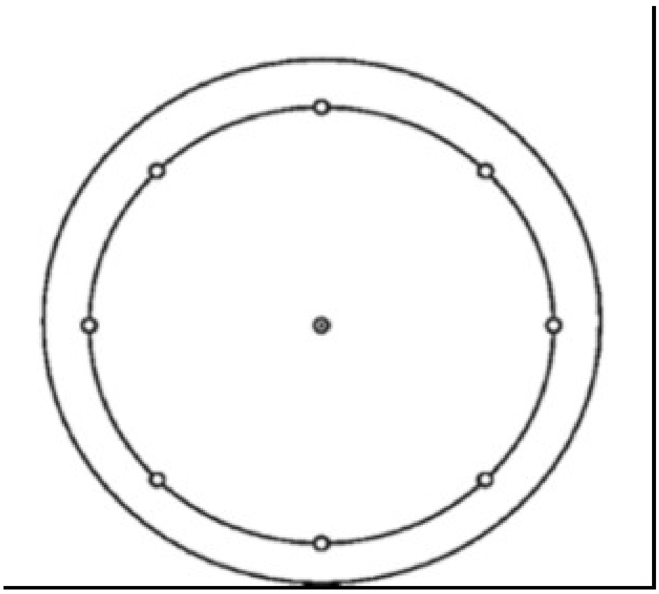
अपूर्णांक तक्ता हा प्लायवूड किंवा जाड एक्रॅलिकचा बनलेला असतो आणि त्याचा आकार भिंतीवर टांगण्याइतका मोठा असतो. सामान लांबीच्या चार्टपेपरच्या पट्ट्या तक्त्यावर लावलेल्या असतात. पहिली पट्टी 1 (पूर्ण) दर्शविते असे मानू. दुसऱ्या पट्टीचे दोन समान अर्ध्या भगांमध्ये विभाजन करा आणि त्यावर आणि $\frac{2}{2}$ हे अपूर्णांक दाखावा. त्यापुढील पट्टीचे तीन समान भाग करा आणि त्यांना $\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{3}{3}$ अशी नावे द्या. सर्व पट्ट्यांची विभागणी करून लहानात लहान अपूर्णापर्यंत जा. जर जागा उपलब्ध असेल तर

आपण $\frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ या अपूर्णापर्यंत जाऊ शकतो. आता या बोर्डच्या वरील बाजूपासून छोटे चेंडू बांधलेल्या दोन दोऱ्या बांधा. या दोऱ्या ओळंब्याच्या रेषेप्रमाणे सरळ राहतील.

अपूर्णांक तक्त्याचा वापर भाग- पूर्ण नमुना दाखविण्यासाठी होतोः कितीम एक एक तृतियांश मिळून एक पूर्ण बनतो? य़ा तक्त्याचा आणखी एक महत्त्वाचा वापर सममूल्य अपूर्णांक दाखविण्यासाठी होतो. ओळंब्याची रेषा एका अपूर्णांकावर ठेवा. तक्ता जर सरळ उभा धरला असेल तर सर्व सममूल्य अपूर्णांक एका उभ्या रेषेत येतील. विद्यार्थी हेही शिकतील की या स्वरूपात असणाऱ्या कोणत्याही अपूर्णांकाची किंमत 1 असते. हा तक्ता वापरून अपूर्णांकांची प्राथमिक स्तरावरील बेरीज व बजाबाकी करणेही शक्य आहे. जर दोन अपूर्णांकांची बेरीज करायची असेल तर ओळंब्याची रेषा वापरून त्याच रेषेवरील सममूल्य अपूर्णांक शोधता येतील व त्यानंतर अंशांची बेरीज केल्यास त्या दोन अपूर्णांकांची बेरीज आपल्याला मिळेल.

वर्तुळाचे गुणधर्म(एक शैक्षणिक साधन)

वर्तुळातील कोनाचे गुणधर्म वर्णन करण्यासाठी हे साधन एक शैक्षणिक साधन म्हणून उपयोगी पडते. शिवाय बहुतकरून विद्यार्थ्यांना हा गुणधर्म नेहमीचा वाटत नाही म्हणून आपण हे शैक्षणिक साधन कसे बनवावे आणि कसे वापरावे ते पाहूया.
साहित्य : वर्तुळाकृती कापलेले पलायवुड किंवा ऍक्रालिक बोर्ड, खिळे (चुका), रबर बॅन्ड.
कृती : ८ इंच व्यासाचा एक वर्तुळाकृती प्लायवुड किंवा ऍक्रालिक बोर्डचा तुकडा घ्या. त्याच्या आत ७ इंच व्यासाचे एक दुसरे वर्तुळ आखुन घ्या. या आतल्या वर्तुळात आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समान अंतरावर खिळे किंवा चुका ठोकून घ्या. यातील सर्व खिळे हे आतील वर्तुळाच्या व्यासाच्या टोकांना परस्पर विरूद्ध आहेत असे ठेवा.



आता एका व्यासाच्या दोन्ही टोकांना रबरबॅन्ड लावा. या रबरबॅन्डचे एक टोक ओढून दुसऱ्या एका वेगळ्या खिळ्याला लावा. आता व्यासाशी तयार होणाऱ्या कोनाचे माप मोजा. नंतर त्या रबरबॅन्डचा दुसरा एक भागओढून आणखी एका वेगळ्या खिळ्याला लावा व व्यासाशी तयार होणाऱ्या कोनाचे माप मोजा. काय दिसते त्याची नोंद करा. या पद्धतीने आपण चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय सिद्ध करू शकतो हे दाखविता येते. तसेच एकात कंसातील सर्व कोन एकरूप असतात हे देखील या साहित्याने

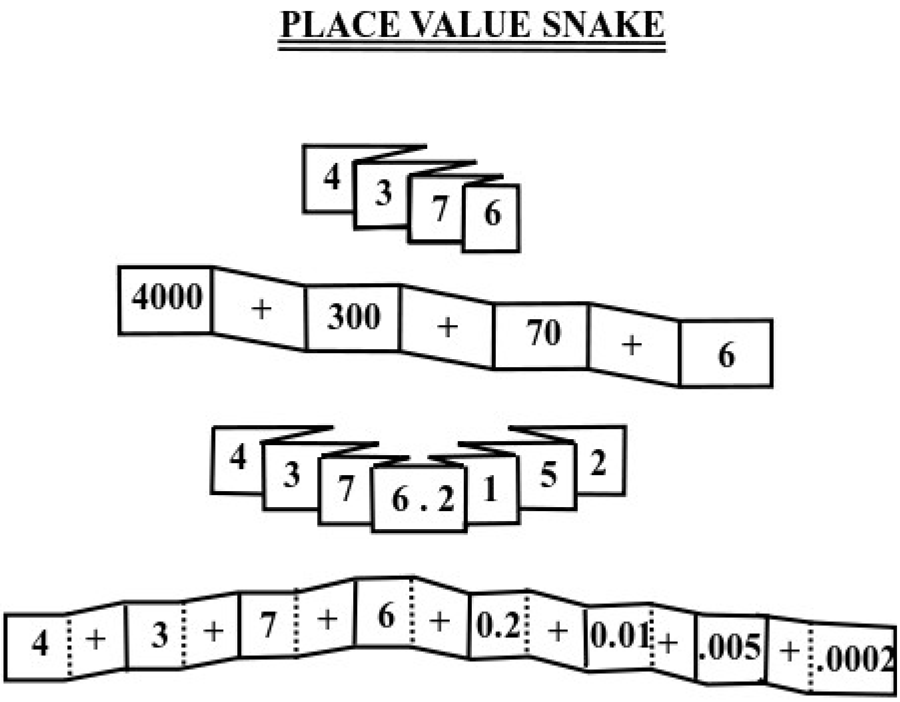
दाखविता येते.

स्थानिक किमतीचा साप

दिलेल्या संख्येतील अंकांची स्थानिक किंमत ओळखणे हे प्राथमिक शाळेतील विद्यार्थ्यांना आकलनास सोपी वाटणारी बाब नाही. स्थानिक किमतीचा हा साप विद्यार्थ्यांना स्थानिक किमतींच्या आकलनास मदत करतो. पाहूया तो कसा......?

साहित्य : कागदाची पट्टी, पेन.

कृती :



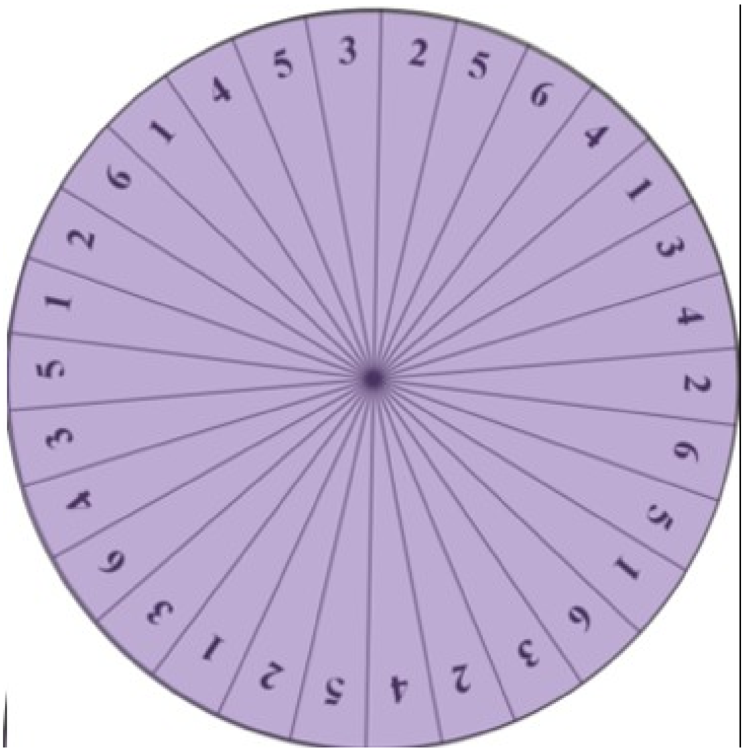
कागदाची पट्टी तयार करून आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे तीची घडी घाला. त्यावर एक संख्या लिहा. जसे ४३७६. आता घडीच्या दृश्य बाजूला आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे ते अंक लिहा आणि घडीच्या न दिसणाऱ्या बाजूस शून्य व " + " चे चिन्ह लिहून घ्या. जेव्हा साप उलघडतो (मोठा होतो) तेव्हा ती संख्या स्थानिक किमतीच्या बेरजेच्या स्वरूपात दिसते. मात्र जेव्हा साप आक्रसतो (लहान होतो) तेव्हा ती मूळची संख्या पून्हा दिसू लागते. अशाप्रकारे वेगवेगळ्या चार, पाच, सहा व त्यापेक्षा अधिक अंकी संख्या या सापाच्या स्वरूपात दाखविता येतात. असा साप तयार करणे लहान वर्गातील मुलांना शक्य आहे. शिवाय खाली आकृती दाखविलेल्याप्रमाणे दशांश संख्याही या प्रकारात लिहीता येते हे विद्यार्थ्यांकडून या सापाद्वारे तयार करता येते.

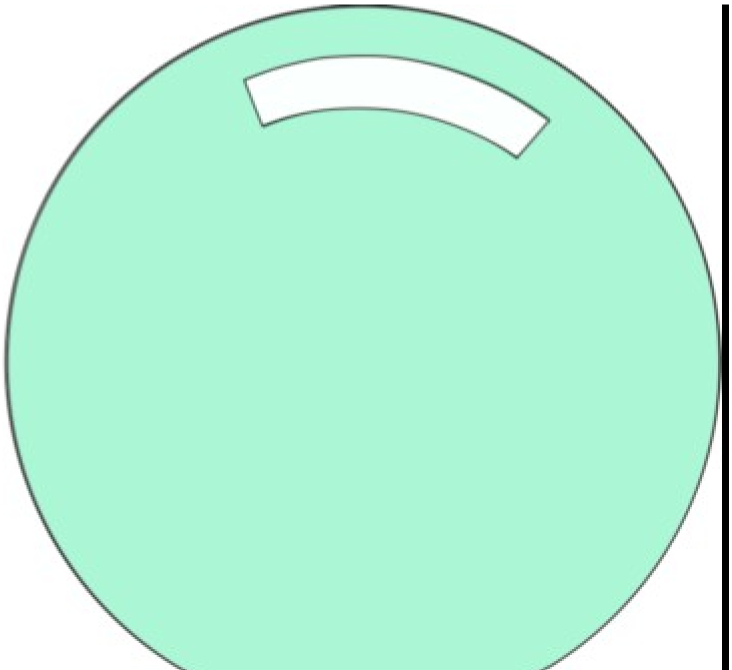
सातची भागाकार चकती

साहित्य: कार्ड पेपर, पेन पेन्सिल, कात्री.

सातच्या भागाकार चकतीमध्ये दोन चकत्या असतात. पहिल्या चकतीचे विभाजन वर्तुळ पाकळयांमध्ये केलेले असते. दुसऱ्या

चकतीमध्ये काही खिडक्या तयार केलेल्या असतात. जेव्हा दुसरी चकती पहिल्या चकतीवर ठेवली जाते तेव्हा एक संख्या आपल्याला दिसते.





उदा. 5 अंकी संख्या. आता दुसरी चकती पहिल्या चकतीवर फिरवा तुम्हाला दिसणारी प्रत्येक संख्या 7 ने पूर्ण भाग जाणारी असेल. हे कशामुळे झाले?

जर तुम्हाला n अंकांची सातची भागाकार चकती बनवायची असेल तर पहिल्या चकतीवर तुम्हाला n आणि 6 यांच्या लसावी इतक्या वर्तुळपाकळ्या बनवाव्या लागतील.

उदा. 5 अंकांची सातची भागाकार चकती बनविण्यासाठी पहिल्या चकतीवर 30 वर्तुळपाकळ्या बनवा आणि सलग येणाऱ्या

कोणत्याही चार स्थानांमध्ये कोणतेही चार अंक लिहा. तयार होणाऱ्या संख्येला 7 ने भागा आणि आणि चकतीवर 5 वा अंक असा लिहा की ज्यामुळे तयार होणरी 5 अंकी संख्या 7 ने भाग जाणारी असेल. आता या 5 अंकी संख्येतील शेवटचे चार अंक घ्या आणि त्यापुढे पाचवा अंक अशा प्रकारे लिहा की ज्यामुळे तयार होणाऱ्या संख्येला 7 ने भाग जाईल. ही क्रिया चालू ठेवा. तुमच्या असे लक्षात येईल की 30 अंक पूर्ण झाल्यावर पुन्हा तेच अंक येत आहेत.

भाग २

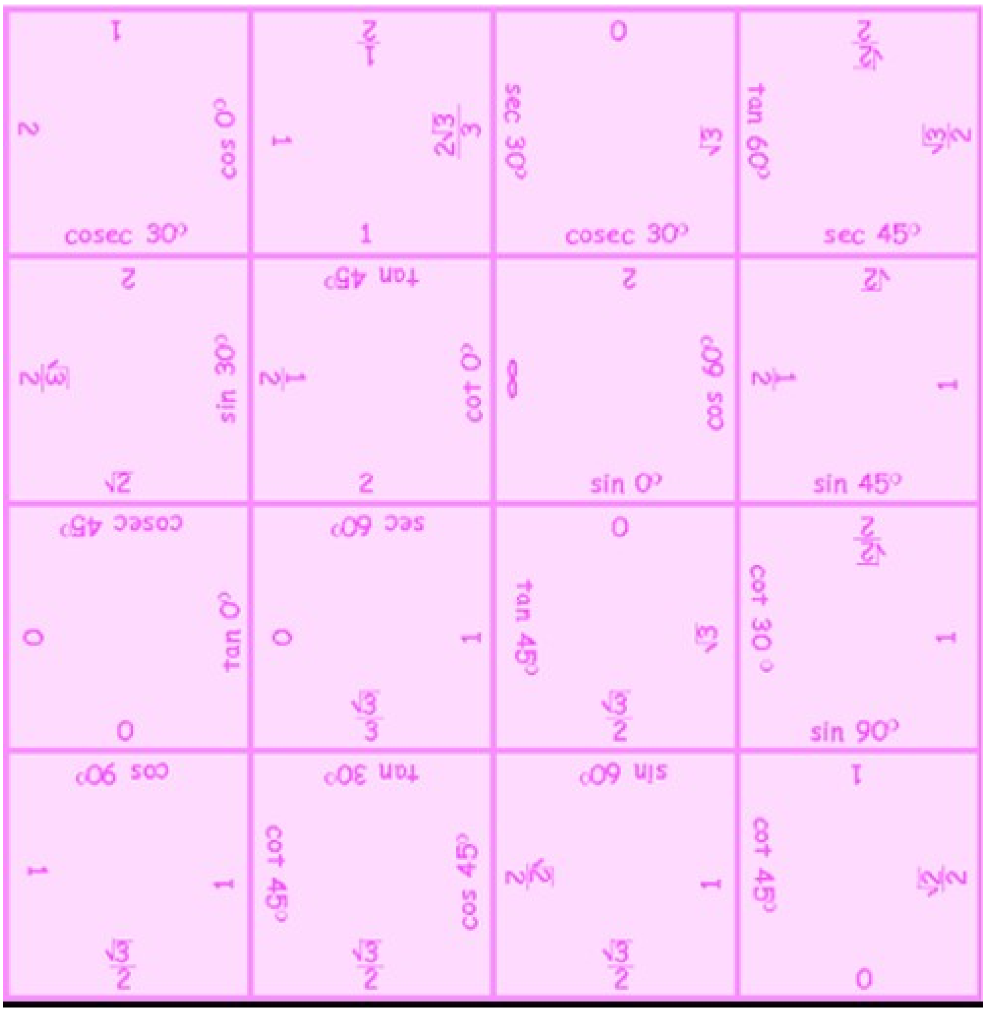
खेळ व कोडी

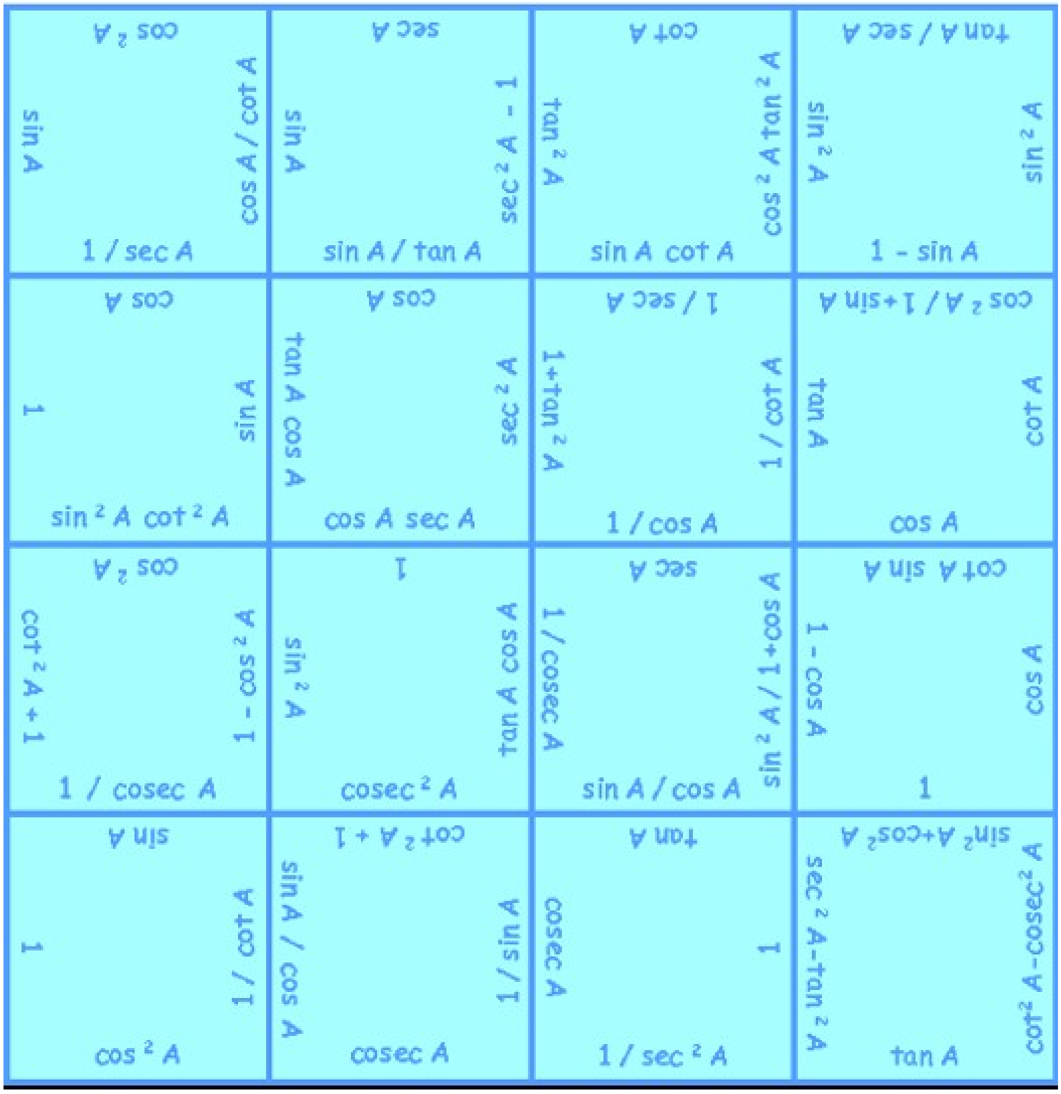
त्रिकोणमितीतील कोडी

साहीत्यः कागद, पेन.

पुढील कोडे हे जिगसॉच्या कोड्यासारखे आहे. यामध्ये विद्यार्थ्यांना 16 छोटे छोटे चौरस वापरून एक मोठा चौरस तयार करायचा आहे. या सर्व तुकड्यांच्या चारही बाजूंवर त्रिकोणमितीतील गुणोत्तरे किंवा अंक लिहीलेले असतात. सर्व तुकडे अशा प्रकारे जोडायचे असताता की ज्यामुळे प्रत्येक जॉईंटवर त्रिकोणमितीतील गुणोत्तर व त्यची किंमत एकमेकांसमोर येईल. विद्यार्थ्यांना अशा प्रकारच्या खेळांचे आकर्षण वाटेल व कोडे सोडविण्यासाठी ते बराच वेळही देतील. 8 इंच $\times$ 8 इंच माप असलेला एक नमुना पुढे दिला आहे. यापासून 16 तुकडे मिळतील. या खेळाची काठीण्यपातळी आपण गरजेप्रमाणे कमी जास्त करू शकतो.

आकृतीमध्ये त्रिकोणमितील दुसरा एक नमुना दाखविला आहे. पहिले कोडे सोडवून झाल्यानंतर दुसरे कोडे सोडविण्यासाठी देऊ शकतो. हे कोडे बनविण्यासाठी आपण वेगवेगळ्या आकारातही बनवू शकतो. उदा. त्रिकोणी, षट्कोनी इत्यादी.





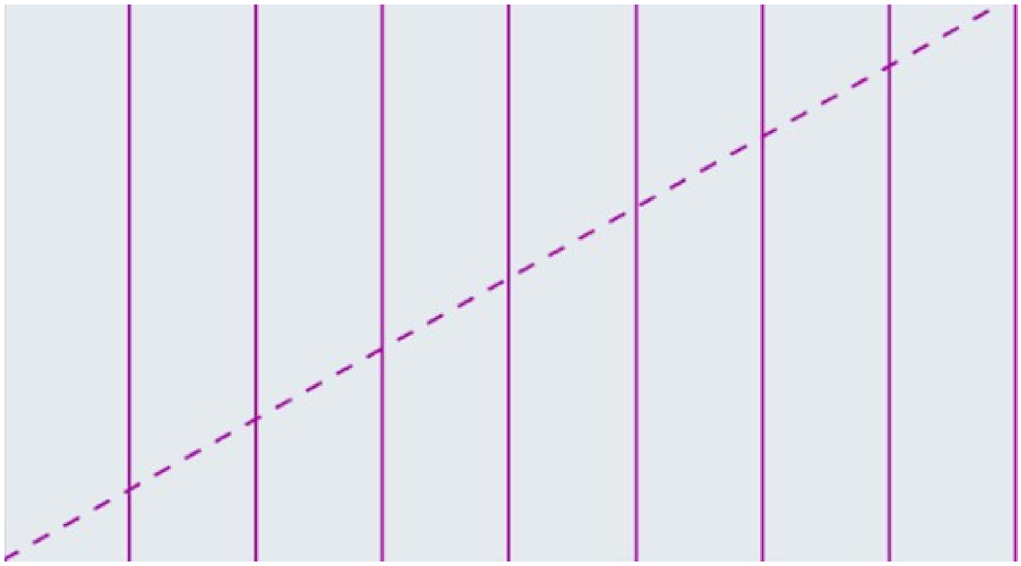
हरविलेल्या रेषा

एखाद्याला आश्चर्यचकित करण्यासाठी ही कृती फार महत्वाची आहे. पण हो...हरविलेली रेषा कुठे जाते, कशी जाते याचे स्पष्टीकरण तुम्हाला देता आले पाहिजे.

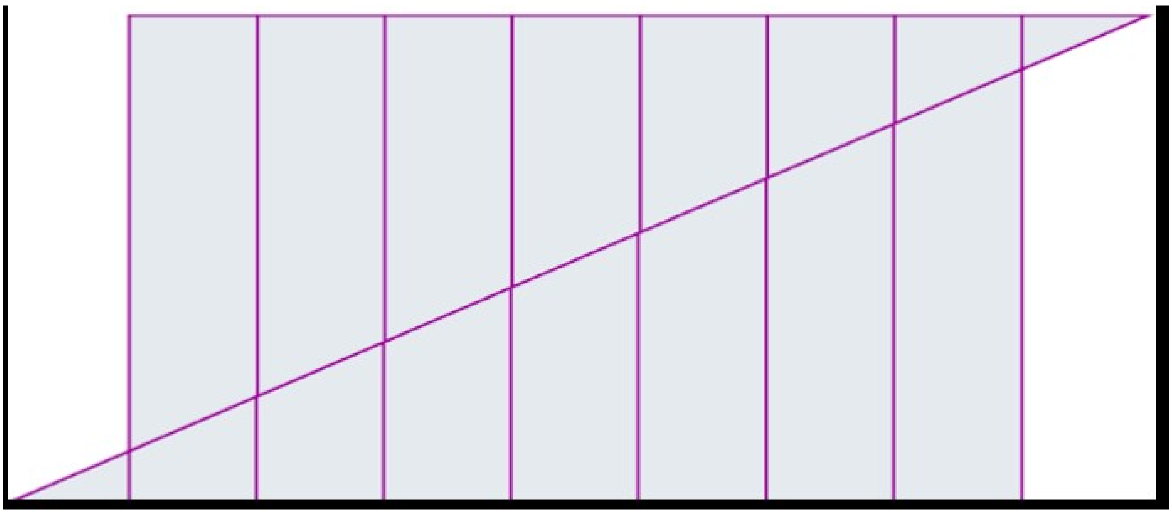
साहित्य : एक कार्डपेपर, पट्टी, स्केचपेन, पेन, पेन्सिल, कात्री.

कृती : प्रथम कार्डपेपरवर 8 इंच लांब व 5 इंच रूंद असा आयत आखा. कात्रीने तो कापून घ्या. आता आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एकाला एक समांतर असतील असे 8 रेषाखंड आखा. हे रेषाखंड स्केचपेनने ठळक करा.

आता त्या आयताचा कर्ण तुटक रेषांनी जोडा. या तुटक रेषांवर कात्रीने कापून त्या आयताचे दोन तुकडे करा.



मग खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे हे तुकडे पुढे-पाठी सरकवा.



विद्यार्थ्यांना विचारा... हे दोन तुकडे एकमेकांच्या विरूद्ध दिशेला पुढे-पाठी सरकविले तर काय होईल? एक रेषाखंड कुठे जातो?

तर काय होते पहा.....? नीट पाहिल्यास असे दिसेल की, एक पुढचा व एक मागचा रेषाखंड आयताची कडा बनतात आणि उरलेले रेषाखंड त्यांच्या मुळ लांबीपेक्षा थोडे मोठे होतात व मधल्या जागेत आपल्याला 8 ऐवजी 7 रेषाखंड दिसू लागतात. पण प्रश्न असा आहे की एक रेषाखंड गेला कुठे?

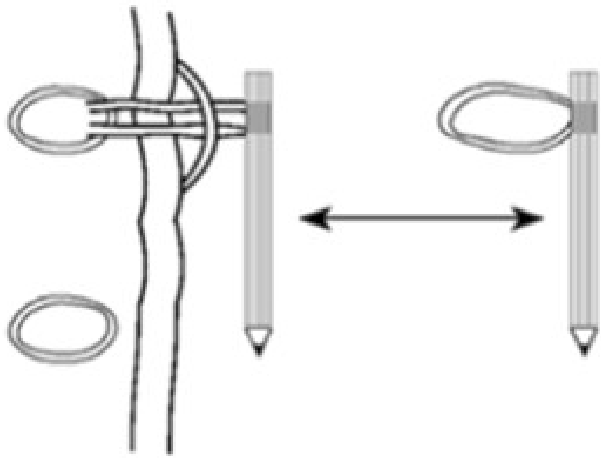
जेव्हा आपण ते दोन तुकडे पुढे-पाठी सरकवितो तेव्हा ते रेषाखंड आयताच्या कडा बनतात म्हणजेच येथे प्रतलाचे विभाजन होते. मग आपणास तो रेषाखंड हरविल्यासारखा वाटतो.

टोपोलॉजिकल कोडी

या भागातील सर्व कोडी किंवा खेळ हे टोपोलॉजीच्या मूलभूत सिद्धांतावर आधारित आहेत. हे सर्व खेळ किंवा कोडी आश्चर्यचकित करणारी आहेत.ती मनोरंजनात्मक असून गणितातील निरसता घालविणारी आहेत, ज्यात विद्यार्थ्यांना सक्रिय सहभागी करण्याची संधी दिली आहे.

बटन-छिद्राचे कोडे

साहित्य : एखादा शर्टचा तुकडा ज्याला बटनाचे छिद्र असेल, काही दोरे किंवा सुतळ, एक पेन्सिल आणि सेलो टेप (चिकटपट्टी).



कृती : प्रथम चित्रात दाखविल्याप्रमाणे सुतळ किंवा दोरा बटनामध्ये ओवून घ्या. आता या सुतळीच्या एका टोकाला सेलो टेपने पेन्सिल चिकटवा. तयार झाले आपले कोडे.....!!

आता तुमच्या मित्राला सुतळ न कापता पेन्सिल या छिद्रातून वेगळी करायला सांगा. पहा जमतेय का त्याला....?

उत्तर अगदी सोपे आहे. सुतळीचा फास बनवून आणि तो बटनाच्या छिद्रातून ओढून घेतल्यास ही पेन्सिल सुटू शकेल.

पट्टा-बक्कल कोडे

साहित्य : बक्कल असलेला पट्टा.

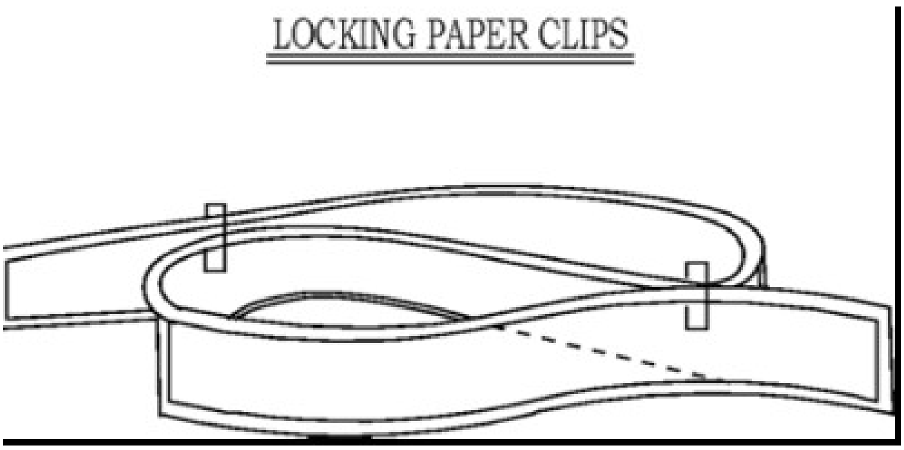
कृती : अगोदरच्या कोड्याप्रमाणेच हे कोडे फार सोपे आहे परंतु काही नवीन विद्यार्थ्यांना अजूनही हे माहीत नाही. खुपश्या विद्यार्थ्यांना माहीत असेल की बऱ्याचदा सर्वसाधारण पट्ट्याचा बक्कलची जागा बदललेली असते. त्यातील पिन अचानक चुकीच्या बाजूला जाते. विद्यार्थ्यांना हे ठाऊकच नसते की हे असे का घडते? शिवाय पुन्हा ती पिन परत योग्य जागी कशी आणावी? हेच खरे कोडे होय. मग करून पहा आणि उत्तर मिळवा.....उत्तर फारच सोपे आहे! संपूर्ण पट्टा त्या बक्कलमध्ये घालून बाहेर काढा. सुटले कोडे...!! आली की नाही पिन योग्य बाजूला...!!

पेपर क्लिप एकमेकांत अडकविण्याचे कोडे

साहित्य : एक पारदर्शक प्लास्टीकची पातळ पट्टी किंवा कागदाची पट्टी, पेपर क्लिप.

कृती : एक इंच रूंद असणारी एक पारदर्शक प्लास्टीकची पातळ पट्टी किंवा कागदाची पट्टी घ्या. प्लास्टीकची ही पट्टी म्हणजे OHP च्या transperency ची काढलेली पट्टी होय. आता या पट्टीच्या एका टोकाला एक फास बनवून त्याला एक पेपर क्लिप लावा. तसेच दुसऱ्या टोकाला दुसरा फास बनवून त्यालाही एक पेपर क्लिप लावा. ही पट्टी आता आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दिसेल.

आता या पट्टीची दोन्ही टोके धरा आणि एकमेकांच्या विरूद्ध दिशेला जोराने ओढा ज्यामुळे त्या पेपर क्लिप एकत्र येऊ लागतील. आता पहा बरे काय झाले ते....? अरे.... या दोन्ही क्लिप एकमेकांत अडकतात. कसे झाले ? तर जेव्हा आपण फाशाच्या स्वरूपात अशा क्लिप लावतो आणि जोराने ओढतो तेव्हा दोन्ही क्लिप एकमेकांच्या फाशात शिरतात व शिरताना एकमेकांत अडकतात.



दोरी-फाशाच्या कुलुपाचे कोडे

साहित्य : 3 फूट लांबीच्या दोन दोऱ्या किंवा नायलॉनच्या सुतळी.

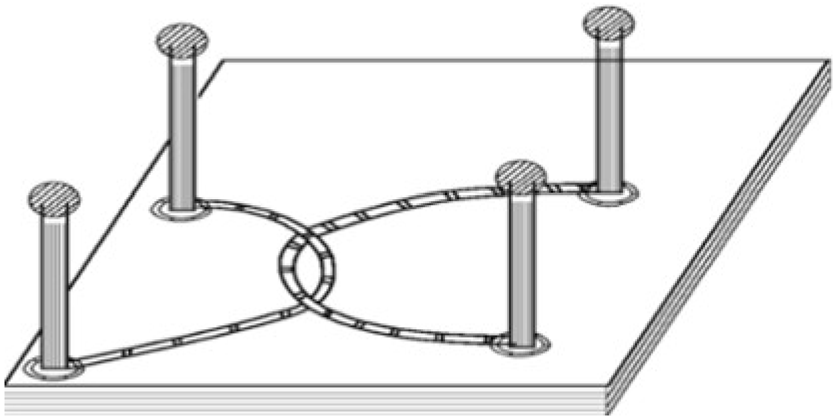
कृती :

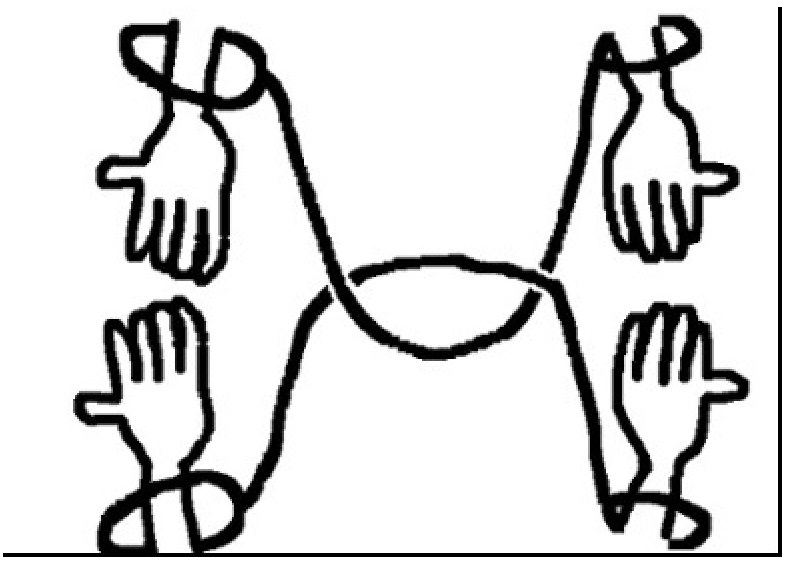
प्रथम दोन विद्यार्थ्यांना पुढे बोलवा. आता एक सुतळ घेऊन तिचे एक-एक टोक पहिल्या विद्यार्थ्यांच्या दोन्ही मनगटात अडकवा. आता दुसऱ्या विद्यार्थ्याला बोलावून दुसरी दोरी अशा रीतीने त्याच्या मनगटात लावा की त्या दोन्ही दोऱ्या एकमेकांत फास लागून अडकतील. आता यातील कोडे आहे की या दोन्ही दोऱ्या हात न सोडविता व दोऱ्या न कापता एकमेकांतून सुट्या कराव्यात.

पहा बरे सुटतेय का हे कोडे.....? या दोन विद्यार्थ्यांना दोरी न कापता वेगळे होता येईल का...?

वास्तविक पाहता, या दोन दोऱ्या, ज्या एकमेकांत अडकलेल्या वाटतात त्या खरतर तशा अशा अडकलेल्या नसतात. त्या जरी अशा गुंतलेल्यासारख्या वाटल्या तरी मनगटाजवळ त्या दोऱ्या उलघडू शकतात.

आता समजा आपण असे मानू की, जेथे एक दोरी मनगटाला बांधली आहे तेथेच हात कापला तर दुसरी अडकलेली दोरी सहज उलघडू शकेल. पण हे शक्य नाही. आता अशी कल्पना करा की हा कापलेला भाग हाताच्या वरच्या दिशेला जात आहे. एक वेळ अशी येईल की, तो भाग फाश्याला पार करेल. आता दुसरी दोरी कापलेल्या भागातून पुढे न्यावी लागेल जेथे ती फाशाला पार करेल. मग दुसरी दोरी कापलेल्या भागातून पुढे न्या. (जेथे हात खरच कापला आहे असे मानलेय म्हणजेच जेथे हाताचे शेवटचे टोक जी बोटे आहेत) त्यातून ही दोरी ओढून काढा आणि काय आश्चर्य पहा...... ही दोरी हात न कापता दुसऱ्या दोरीतून वेगळी झाली आहे.



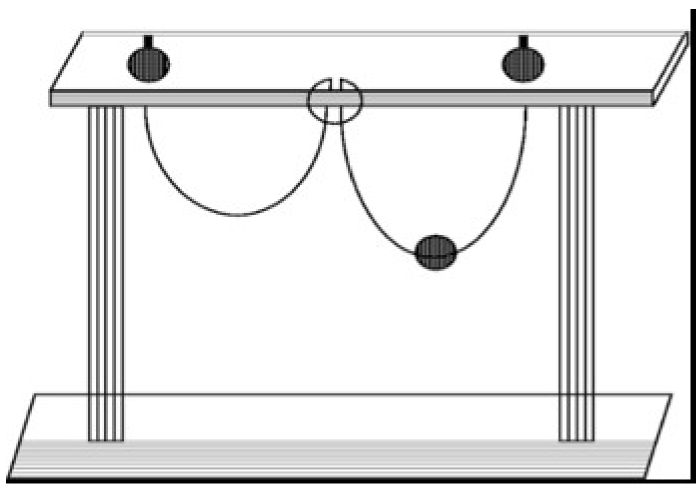


दोरी आणि मण्याचे कोडे

साहित्य : सुतळ किंवा दोरीचा एक लांब तुकडा, तीन मणी, आयताकृती लाकडाचा तुकडा.

कृतीः प्रथम एक आयताकार लाकडाचा तुकडा कापून घ्या. त्याला 1 सेमी व्यासाची छिद्रे पाडा व त्यात एक छिद्र मध्यभागी व इतर दोन छिद्रे एक-एक याप्रमाणे त्या तुकड्याच्या दोन्ही टोकांना पाडा. मणी मात्र इतका मोठा असावा की तो छिद्रातून जाणार नाही. आता दोरीच्या एका टोकाला एक मणी बांधा आणि दोरीचे दुसरे टोक प्लायवुडला पाडलेल्या दोन टोकांच्या छिद्रांतून जाऊ द्या. आता ही दोरी आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे फासा तयार होईल अशी छिद्रतून ओढून घ्या.

आता दुसरा मणी त्या दोरीत ओवा आणि ती दोरी प्लायवुडच्या दुसऱ्या टोकातून बाहेर येऊ द्या. शेवटी उरलेला मणी त्या दुसऱ्या टोकाला बांधा. ही सर्व आखणी खाली चित्रात दाखविल्याप्रमाणे दिसेल.



आता कोडे असे आहे की मधला मणी दुसऱ्या फाशात आणावा. करा बर प्रयत्न.....? पहा बर येतोय का तो मधला मणी दुसऱ्या फाशात.....? या कोड्यामागचे तत्व हे यापूर्वी पाहीलेल्या एका कोड्याप्रमाणेच आहे. आता उत्तर कसे मिळवायचे ते पाहूया.

अंगठा व तर्जनीने लाकडी तुकड्याच्या मधल्या छिद्रातील दोरी पकडा आणि ती टोकाकडील एका छिद्रातून ओढून घ्या. आता खालून ती दोरी मधल्या छिद्रातून ओढून घ्या व तो मणी टोकाकडच्या मण्याजवळ जाऊ द्या. पुन्हा दोरी टोकाकडच्या छिद्रातून मागे ओढून घ्या. आता या एका फाश्यातून तो मणी मोकळा झाला. पुन्हा हीच क्रिया दुसऱ्या विरूद्ध टोकाकडच्या छिद्राकडे करा आणि ही दोरी पूर्णतः मधल्या छिद्रातून बाहेर पडेल आणि एकच मोठा फासा तयार झालेला दिसेल. आता मधला मणी आपल्याला हवा तेथे न्या व हीच क्रिया पुन्हा उलट क्रमाने करा. दोन उलट पायऱ्यांनंतर तुम्ही पुन्हा मुळच्या स्थितीत जाल. मात्र आता हा मणी वेगळ्या फाशात असेल.

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा खेळ

शालेय भूमितीत पायथागोरसचे प्रमेय अतिशय महत्वाची भूमिका बजाविते. पायथागोरसचे प्रमेय म्हटले की डोळ्यासमोर येतो तो काटकोन त्रिकोण व त्याचा कर्ण आणि काटकोन करण्याऱ्या दोन बाजू! या खेळाद्वारे पायथागोरसच्या प्रमेयाची ओळख होऊन त्याची अधिक माहिती मिळेल.

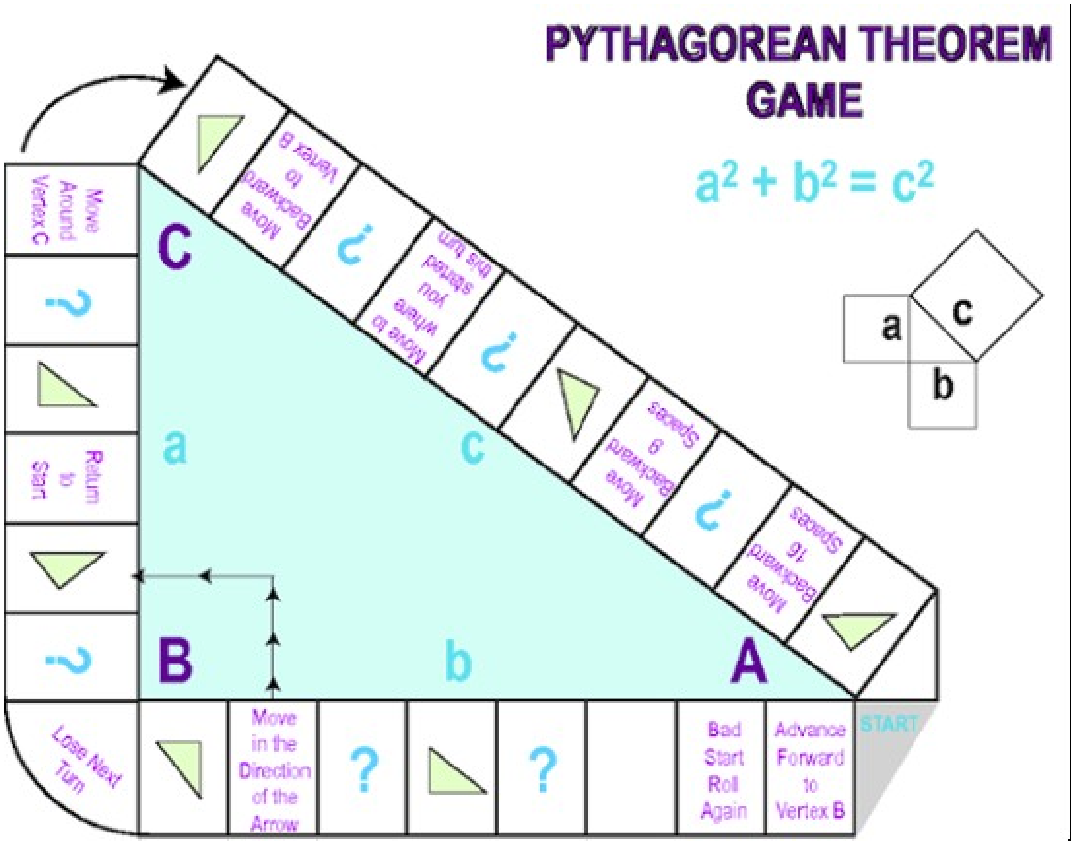
साहित्य : बोर्ड आणि प्रश्नाची कार्डे बनविण्यासाठी चार्टपेपर, कटर, बटणे किंवा सोंगट्या आणि दोन फासे.

कसे खेळावे : या खेळात दोन किंवा अधिक खेळाडू लागतात. यामध्ये दोन खेळाडू फाशाच्या जोडी टाकून आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे त्रिकोणाकृती रस्त्यावर आपल्या सोंगट्या किंवा बटणे फिरवितात.

कृती : प्रथम चित्रातील आकृती काढून ती चार्टपेपरवर चिकटवा. आता त्यावरील प्रश्न एक-एक कार्डावर लिहा, ही झाली प्रश्नांची कार्डे.

आता दोन्ही फासे एकत्र टाका. त्यांच्या पृष्टभागावर आलेल्या संख्यांच्या वर्गांची बेरीज करा व त्या बेरजेचे वर्गमूळ घ्या. जर उत्तर दशांश अपूर्णांकात येत असेल तर जवळील पूर्णांकाशी जुळवून घ्या आणि त्या पूर्णांकाएवढी स्थानाने आपली सोंगटी पुढे सरकवा. उदा. जर दोन फाश्यांवर 1 व 2 असे अंक आले तर त्यांच्या वर्गांची बेरीज ($1^2 + 2^2 = 5$) येईल. आता 5 चे वर्गमूळ अंदाजे 2.236 म्हणजेच जवळचा पूर्णांक 2 घेऊ आणि दोन स्थाने पुढे सोंगटी सरकेल. अशाप्रकारे एक-एक खेळाडू फासे फेकून आपापली सोंगटी पुढे सरकविल. मात्र जर सोंगटी *?* केलेल्या स्थानावर आली तर तयार केलेल्या प्रश्नांच्या कार्डातील कोणतेही एक कार्ड यादृच्छिकपणे निवडून त्या खेळाडूस प्रश्नाचे उत्तर द्यायला सांगावे. जर त्याने योग्य उत्तर दिले तर त्यास पून्हा खेळण्याची संधी मिळेल. यावेळी मात्र त्याने दोन ऐवजी एकच फासा फेकावा आणि जर त्याने प्रश्नाचे उत्तर चुकीचे दिले त्या खेळाडूस पून्हा खेळण्याची व आपली सोंगटी पुढे सरकविण्याची संधी मिळणार नाही. पुन्हा ओळीने त्याची वेळ आली की तो खेळू शकेल. जो खेळाडू हा संपूर्ण मार्ग दोनदा फिरेल तो जिंकला असे समजावे.

यापद्धतीने वर्ग करणे व वर्गमूळ काढणे आणि दशांश अपूर्णांकाचे जवळच्या पूर्णांकात रूपांतर करणे या गणिती कौशल्यांचा विकास करता येईल.



जादूची मनकवडी

साहित्य : चार्टपेपर, पेन किंवा पेन्सिल, कटर, कात्री

कृती : एका चार्टपेपरमधून समान आकाराचे (साधारणत: 8 इंच □ 6 इंच) चे आयत असलेली 7 कार्डे कापून घ्या. चित्रात दाखविल्याप्रमाणे मुख्य कार्डावर 1 ते 20 अंक लिहून घ्या.

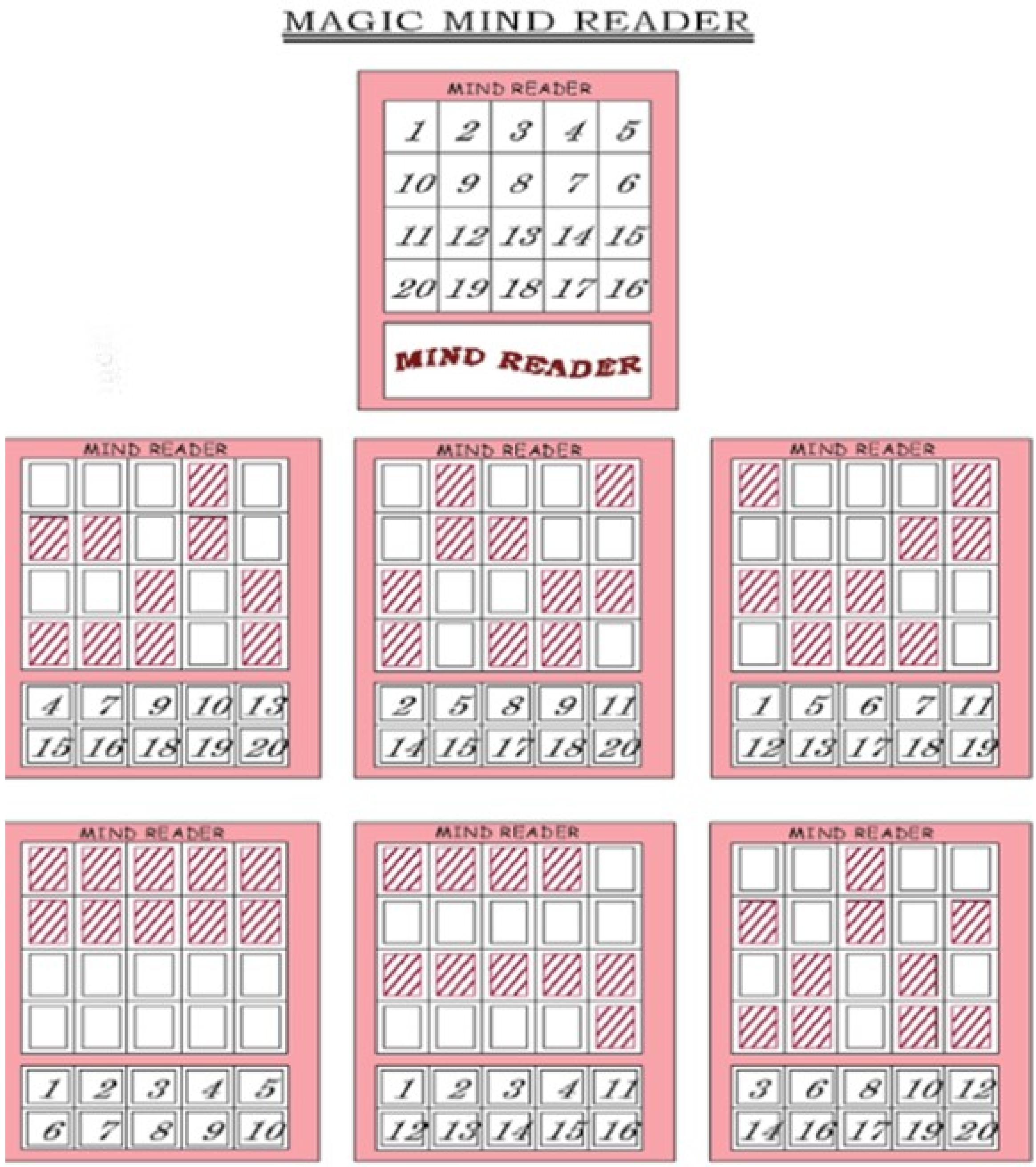
आता उरलेल्या ६ कार्डावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, चौकटी कटरने कापून घ्या आणि त्या खाली दोन ओळींमध्ये त्या संख्या लिहून घ्या. आता आपली मनकवडी जादू दाखविण्यास तयार आहे.

कसा खेळावा : तुमच्या मित्राला मुख्य कार्ड दाखवून त्यातील एक संख्या मनात ठेवायला सांगा आणि त्यानंतर इतर सहा कार्डे एक-एक करून मित्राला दाखवा. त्यावेळी त्याने मनात ठेवलेली संख्या ज्या-ज्या कार्डात आहे असे तो सांगेल ती कार्डे मुख्यकार्डावर तंतोतंत ठेवीत चला. याच वेळी मनात धरलेली संख्या नसलेली कार्डे बाजूला ठेवीत चला. मात्र ती कार्डे मुख्यकार्डावर ठेवू नका. आपल्याला प्रत्येकवेळी हेच दिसून येईल की मनात धरलेली संख्या असणारी फक्त तीनच कार्डे असतील. ही तीन कार्डे मुख्यकार्डावर तंतोतंत ठेवल्यास असे दिसेल की एक अशी सामाईक चौकट आहे की त्यातून मुख्य कार्डावरील संख्या दिसत आहे. हीच संख्या जी तुमच्या मित्राने मनात धरली होती आणि हीच ती जादूची चौकट....!

पण ही मनकवडी काय जादू करून मनातली संख्या ओळखत असेल....? विचार करूया...

मुख्य कार्ड सोडून इतर जी सहा कार्डे आहेत त्यांना आपण "मुखवटे कार्डे" म्हणू. आता प्रत्येकवेळी मनात ठेवलेली संख्या कोणत्याही तीन कार्डात असावी हा नियम पाहता प्रत्येक संख्या तीनच कार्डात टाकण्यासाठी 6 पैकी 3 कार्डे प्रत्येकवेळी आपणास निवडावी लागतील. त्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर करू.

$$^{6}C_{3}=\frac{6!}{(6-3)!3!}=20$$



म्हणजेच येथे 6 पैकी 3 कार्डे निवडण्याचे वेगवेगळे 20 मार्ग आहेत. म्हणूनच मुख्य कार्डांपैकी प्रत्येक संख्या कोणत्याही कार्डात टाकण्याची मुभा आहे. आता प्रत्येक मुखवट्या कार्डावर लिहीलेल्या संख्येच्या वरील रिकामी चौकट त्याच क्रमाने व त्याच संख्येच्या जागेवर कापा. उदा. मुखवट्या कार्डात 4 हा अंक असेल तर त्यावरील पहिल्या ओळीतील 4 थी चौकट कापावी. याप्रमाणे 6 मुखवट्या कार्डामधील खालच्या ओळीत लिहीलेल्या अंकांनुसार वरच्या ओळीत त्याचक्रमाने चौकट कापावी.अशी सर्व कार्डे तयार करून घ्यावी आणि तुमच्या मित्रमैत्रिणींना ही जादू दाखवावी.

मनकवडी

साहित्यः कोरे कागद आणि पेन

हा असा एक खेळ आहे जो जादू सारखा वाटतो पण त्यामागे जे तथ्य आहे ते सहजपणे समजू शकते. आकृतीमध्ये दाखवलेला तक्ता तुमच्या कागदावर बनवून घ्या.

आता तुमच्या मैत्रिणीला 50 पेक्षा लहान अंकमनात धरायला सांगा. तिला तिचा अंक कोणत्या कार्डामध्ये आहे ते विचारा. ज्या ज्या कार्डांमध्ये तो अंक असेल त्यांच्या कोपऱ्यातील अंकांची बेरीज करा. ही बेरीज म्हणजे तुमच्या मैत्रिणीने मनात धरलेला अंक असेल. या मागील तथ्य इतके सोपे आहे की तुम्ही तुमची स्वत:ची कार्डे बनवू शकता जी येथे दिलेल्या कार्डांहून वेगळी असतील.

हे करण्यासाठी 1 ते 9 पर्यंतच्या अंकांसाठी कार्डे तयार करा. तुम्हाला 4 कार्डे तयार करावी लागतील आणि त्यांच्या कोपऱ्यांमध्ये हे अंक असतील. [1] [2] [4] [8] (बॉक्समध्ये असलेले अंक हे कोपऱ्यातील अंक आहेत.)

1 ते 9 पर्यंतचे सर्व अंक या कार्डांमध्ये तुम्हाला अशा प्रकारे लिहायचे आहेत की ज्यामूळे ज्या कार्डांमध्ये तो अंक आहे, त्याच्या कोपऱ्यातिल अंकांची बेरीज केल्यास तो आंक मिळेल. म्हणजेच तुम्हाला 1 ते 9 पर्यंतचे सर्व अंक 1, 2, 4 आणि 8 यांच्या बेरजेच्या स्वरूपात लिहायचे आहेत. 1आणि 2 हे आपल्या कार्डांमध्ये आधीच आहेत. 3 आपण 1+2 असे लिहु शकतो. त्यामुळे 3 हे [1] आणि [2] या कार्डांमध्ये आले पाहिजेत. 4 आपल्याकडे आधीच आहेत. 5 आपण 1+ 4 असे लिहू शकतो. त्यामुळे 5 हे [1] आणि [4] या कार्डांमध्ये आले पाहिजेत. अशा प्रकारे 9 पर्यंतच्या सर्व संख्या लिहा.

नवीन कार्डामध्ये 10 हा अंक आपण कोपऱ्यात लिहू शकतो. आता 11 ते 19 पर्यंतचे सर्व अंक आपण 10आणि एक अंकी संख्या यांच्या बेरजेच्या स्वरूपात लिहू शकतो. उदा. 15 ही संख्या आपण 10+ 5 अशी लिहू शकतो. 15 ही संख्या [10] हा अंक कोपऱ्यात असणाऱ्या कार्डामध्ये आणि 5 ही संख्या ज्यांमध्ये येते अशा कार्डांमध्ये येईल.

म्हणुन 15 हे [10] , [4] आणि [1] च्या कार्डांमध्ये लिहावी लागेल. अशा प्रकारे 19 पर्यंतच्या सर्व संख्या लिहा. 20 ते 29 पर्यंतच्या संख्यांसाठी अजून एक कार्ड तयार कारा. अशाच प्रकारे तुम्ही 49 पर्यंत जाऊ शकता. याप्रमाणे येथे दाखविलेली कार्डे तयार करता येतात.

आता कोपऱ्यातील अंक बदलून [1] [2] [3] [5] हे अंक लिहा. तुम्ही कार्डांचा झजून एक संच बनवू शकता का? येथे दाखविलेलीपद्धत ही सर्वांत चांगली पद्धत आहे असे नाही. 10 या अंकासाठी नवीन कार्ड तयार करण्याची गरज नाही. 8+2

अशा प्रकारेही आपण ही संख्या दाखवू शकतो. त्यामुळे 8 आणि 2 च्या कार्डांमध्ये आपण ही संख्या किहू शकतो. याप्रमाणे पहिल्या 4 कार्डांमध्ये तुमच्या किती संख्या बसतील? तुम्हाला चांगला वाटेल अशा पद्धतीने ही कार्डे बनवा. 6 कार्डांचा वापर करून तुम्ही किती मोठा अंक वाचू शकता ते शोधून काढा.

टिकटॅक मल्टीप्लायर:

साहित्यः कार्डपेपर, दोन वेगवेगळ्या रंगांची (उदा. लाल व निळ्या) बटने, (अंदाजे 15 ते 20)

हा खेळ आपण नेहमी खेळतो त्या फुली-गोळा या खेळासारखाच आहे. या खेळातील बोर्डवर प्रत्येक खेळाडू आपल्याजवळ असलेले एक-एक बटन फॅक्टर बोर्डवर ठेवेल. आता पहिला खेळाडू त्याचे फॅक्टर बोर्डवरील बटन त्याला हवे त्या ठिकाणी हलवू शकतो. हा खेळाडू ज्या दोन चौरसांवर बटने आहेत त्या दोन संख्यांचा गुणकार करेल व आपल्या जवळ असलेले एक नवीन बटन मेन बोर्डवरील गुणाकाराच्या संख्येवर ठेवेल. उदा. जर फॅक्टर बोर्डवरील निळे बटन -1 वर आहे आणि लाल बटन 4 वर आहे. यांचा गुणकार -4 आहे. तर पहिला खेळाडू लाल बटन मेन बोर्डवरील -4 वर ठेवेल.

आता दुसरा खेळाडू खेळेल. ती आपले फॅक्टर बोर्डवरील (नीळे बटन) हलवेल. आता दोन बटने ज्या दोन संख्यांवर आहेत त्यांचा गुणाकार करून आपले नीळे बटन मेन बोर्डवरील त्या गुणाकारावर ठेवेल. पहिला खेळाडू फॅक्टर बोर्डवरील नीळे बटन हलवू शकतो तर दुसरा खेळाडू फॅक्टर बोर्डवरील लाल बटन हलवू शकतो.

जर एखाद्या खेळाडूने चूक केली तर तो किंवा ती एक डाव खेळू शकणार नाही. जो/ जी खेळाडू प्रथम 4 बटन एका रांगेत आणेल, तो/ ती खेळ जिंकेल. हा खेळ म्हणजे टीक टॅक टो या खेळाशी थोडाफार मिळता-जुळता आहे. टीक टॅक टो या खेळामध्ये बटने (फुली/ गोळा) बोर्डवर कुठेही ठेवता येतात. या खेळामध्ये काही बंधने घातल्यास आपला खेळ तयार होतो. फॅक्टर बोर्डमूळे बटन ठेवण्याच्या जागांवरती काही बंधने येतात. आपण काही बदल करून आपल्याला हवा तसा खेळही तयार करू शकतो.

TIC TAC MULTIPLIER

$a^2 + ab$	$4b$	$a^2 - ab$	$a^2 + 2ab + b^2$	-16	$4a + 4b$
a^2	$-b^2$	ab	-4	$-ab$	b^2
$ab - b^2$	$-a$	b	$-a - b$	$-a^2$	$-4a + 4b$
$4a$	$-a^2 + ab$	$-a^2 - ab$	4	$-b^2 - ab$	$-4a$
$4a - 4b$	$-b$	16	$a^2 - b^2$	$-ab + b^2$	$-4b$
$-4a - 4b$	$-a + b$	1	$a^2 - 2ab + b^2$	a	$b^2 + ab$

a b	a	b	4	1	4	b	a	a b

संयोजन वही

ही एक चित्रपुस्तिका आहे, ज्यात आठ वेगवेगळ्या प्राण्यांची चित्रे दिसतात. प्रत्येक पान हे तीन भागात विभागलेले असते. तसेच प्रत्येक प्राण्याचे चित्र हे देखील डोके, धड व पाय अशा तीन समान भागात विभागलेले असते. पाहूया तर ही चित्रपुस्तिका कशी तयार करावी.....?

साहित्य : कागदाची आठ पाने, स्टेपलर.

कृती : ही पुस्तिका काळजीपूर्वक काढलेल्या चित्रांपासून तयार केलेली असते. ही पाने अशारितीने स्टेपलरने जोडावी की सर्व तुटक रेषा ओळीने एकमेकांवर असतील. आता ही सर्व पाने तीन भागांवर तंतोतंत कापावीत. त्या प्राण्यांचे डोके, धड आणि पाय वेगवगळे प्राण्यांला जोडून विचित्र प्राणी तयार करा. जर डोके आणि धड तसेच ठेवून फक्त पायांची अदलाबदल केली तर किती

प्रकारचे प्राणी मिळतील?......करून पहा..... हो बरोबर !!.....8 प्रकारचे प्राणी मिळतील.

आता जर डोके कायम ठेवून जर धड व पाय यांची अदलाबदल केली तर किती चित्रे मिळतील? अशी 64 चित्रे मिळतील. कारण येथे $8 \times 8 = 64$ अशा शक्यता मिळतात. आता जर डोके, पाय आणि धड या तीनही अवयवांची अदलाबदल केली तर एकूण 512 चित्रे तयार होतील कारण $8 \times 8 \times 8 = 512$ चित्रे तयार होतील म्हणजेच 512 शक्यता मिळतील.

डॉमिनोज

साहित्य: चार्ट पेपर, पेपर क्लिप्स, पेन.

कृती : प्राथमिक इयत्तांमधील विद्यार्थ्यांना आकार समजून घेण्यासाठी ही कृती उपयोगी ठरु शकेल. डॉमिनोज म्हणजे दोन चौरसांची मिळून बनलेली आकृती. चार्ट पेपर पासून दोन सारख्या आकारांचे चौरस कापून घ्या. यातील प्रत्येक चौरसाचा आकार बुद्धीबळाच्या पटावरील एका चौरसाइतका असू द्या. आता, बुद्धीबळाचा पट विद्यार्थ्यांसमोर ठेवा. तो पूर्ण झाकण्यासाठी किती डॉमिनोज लागतील?...

6×6 चा एक आणि 4×4 चा एक असे दोन चौरस वापरून अशीच कृती करायला सांगा. कोपऱ्यातील दोन समोरासमोरचे चौरस काळया कागदाने झाकलेले असताना चौरसाचा उरलेला भाग डॉमिनोज वापरून झाकता येईल का?....

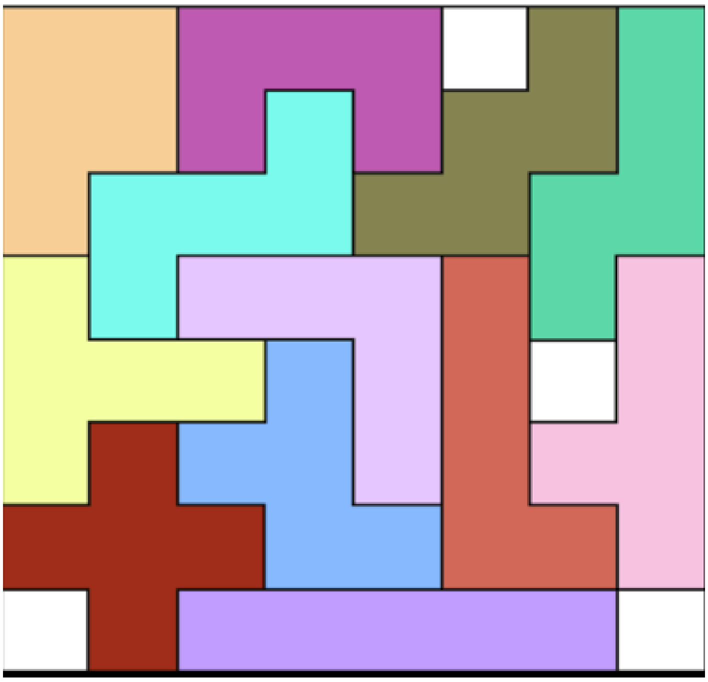
पेंटोमिनोज

साहित्य: चार्ट पेपर, पेपर क्लिप, पेन.

पाच चौरसांचे तुकडे एकमेकांना जोडून पेंटोमिनोज बनविले जातात. यामध्ये एका चौरसाची एक बाजू दुसऱ्या चौरसाच्या बाजूला जोडली गेली पाहीजे. अशा रीतीने चौरस एकमेकांना जोडण्याचे एकूण 12 प्रकार आहेत. म्हणून एकूण 12 पेंटोमिनोज तयार होतात.

विद्यार्थ्यांना सर्व 12 पेंटोमिनोज तयार करायला सांगा. हे तयार करताना एक चौरस चेसबोर्ड वरील एका चौरसाच्या आकाराचा असू द्या. हे सर्व पेंटोमिनोज त्यांना कार्डपेपरपासून कापून घ्यायला सांगा. जर एका लहान चौरसाचे क्षेत्रफळ एक चौरस एकक आहे असे मानले तर पेंटोमिनोजचे एकूण क्षेत्रफळ 12 □ 5= 60 चौरस एकक होईल. विद्यार्थ्यांना 64 चौरस असणारा 8 □ 8 चा एक चेसबोर्ड घ्या. पेंटोमिनोज वापरून चेसबोर्ड अशा प्रकारे भरता येईल का की ज्यामुळे फक्त 4 चौरस रिकामे राहतील?

PENTAMINOES FROM A 8 × 8 BOARD



अशा प्रकारची रचना अनेक प्रकारे करता येत असली तरीही 64 पैकी 60 चौरस भरण्यासाठी थोडा वेळ लागेल. यांपैकी काही रचनांमध्ये बरोबर मध्यभागी 4 चौरस रिकामे राहतात. विद्यार्थी अशी रचना शोधू शकतील का?

संख्यारेषेचा खेळ

साहित्यः चार्ट पेपर किंवा कार्डबोर्ड, पेन, प्रत्येकी पाच याप्रमाणे दोन वेगवेगळ्या रंगांची बटने.

खेळः पुढे एक सोपा आणि मनोरंजक खेळ दिलेला आहे. या खेळामुळे बेरीज आणि बजाबाकी सारख्या क्रियांमधील मुलांचे कौशल्य अधिक विकसित होईल. हा खेळ प्राथमिक शाळेतील विद्यार्थ्यांसाठी अधिक उपयुक्त ठरेल.

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे योग्य लांबीची संख्यारेषा काढून घ्या. एका वेळी दोन मुले हा खेळ खेळतील. त्यांच्यापैकी प्रत्येकाला एका रंगाची 5 बटन्स मिळतील. उदा. एका मुलाला 5 लाल बटन्स आणि दुसऱ्या मुलीला 5 निळी बटन्स. सुरुवातीला सर्व बटन्स शून्य या अंकावर ठेवली जातील. आता पहिला खेळाडू एक कार्ड उचलेल. त्यावर एक संख्या लिहिलेली असेल. पहिला खेळाडू आपले लाल रंगाचे बटन त्या कार्डामध्ये लिहिलेल्या संख्यारेषेवरील संख्येवर ठेवेल. आता दुसरा खेळाडू दुसरे कार्ड उचलेल आणि आपले निळया रंगाचे बटन कार्डामध्ये लिहिलेल्या संख्येच्या जागी संख्यारेषेवर ठेवेल.

प्रत्येकवेळी कार्ड उचलल्यानंतर तो किंवा ती नवीन लाल किंवा निळया रंगाचे बटन उचलून त्या त्या रंगावर ठेवेल किंवा आधीचेच बटन उचलून ते कार्डमध्ये असलेल्या संख्येइतक्या घरांनी पुढे जाईल. उदा. समजा सुरुवातीला बटन 5 वर आहे आणि कार्डामध्ये 7 हा अंक आलेला आहे तर तो / ती आपले बटन उचलून 12 वर ठेवेल. या खेळामध्ये खेळाडूला जास्तित जास्त

बटने मिळवायची आहेत. प्रत्येक खेळाडू लाल किंवा निळी यापैकी कोणतीही बटने मिळवू शकतो.

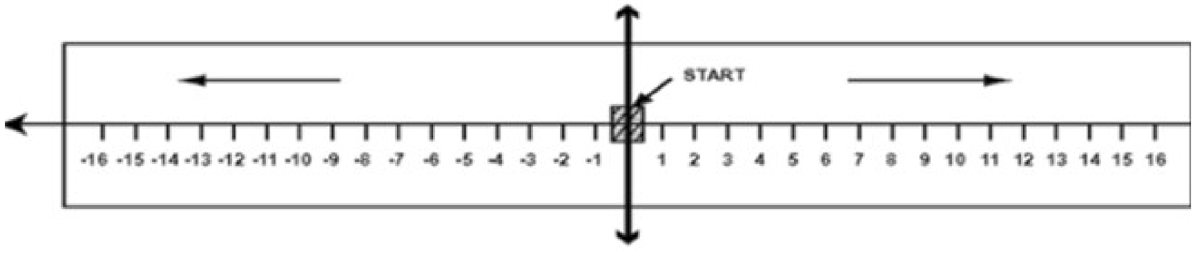
खेळाडूला बटने मिळविण्यासाठी दोन मार्ग आहेत:

- एखाद्या खेळाडूच्या बटनाने जर -19 किंवा 19 पार केले तर तो/ ती नवीन बटन मिळविते.
- जर एखाद्या खेळाडूचे बटन दुसऱ्या खेळाडूच्या बटनाला ओलांडून पुढे गेले तर दुसऱ्या खेळाडूचे ते बटन पहिल्या खेळाडूला मिळेल.

जेव्हा सर्व लाल किंवा निळी बटन्स संख्यारेषा सोडून बाहेर जातील तेव्हा खेळ संपेल आणि ज्याच्याकडे जास्त बटने असतील तो/ ती खेळ जिंकेल.

काही नियम:

- संख्यारेषेवर दोन बटन्स एकाच संख्येवर येऊ शकत नाहीत.
- जर बटने हलवत असताना खेळाडूने आकडेमोडीत चूक केली तर ते बटन सुरुवातीच्या जागी म्हणजे 0 वर परत जाईल.
- जर खेळाडूने स्वतःच्या बटनाला पार केले तर ते बटन त्याचेच राहील.(दुसऱ्याला जाणार नाही.
- जर खेळाडू दुसऱ्या खेळाडूची दोन किंवा तीन बटने पार करत असेल तर ती सर्व बटने पहिल्या खेळाडूला मिळतील.



हनॉईचा टॉवर:

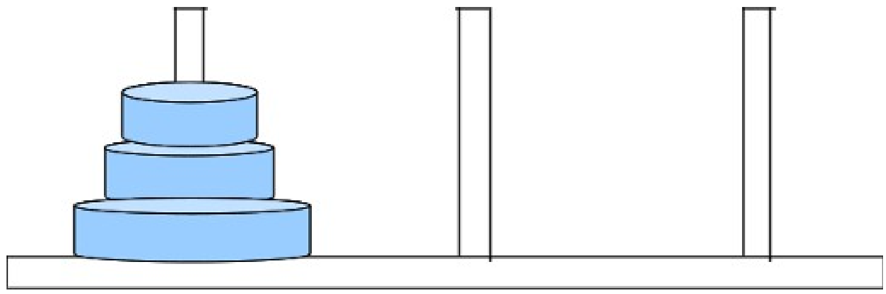
साहित्य: तीन छोचे खांब असणारा बोर्ड, चकत्या

खेळ:

आपल्याकडे तीन खांब असणारा बोर्ड आहे. एका खांबामध्ये सर्वात मोठी चकती खाली आणि त्यापेक्षा छोटी त्यावर, अशा प्रकारे अनेक चकत्या आपण आकाराप्रमाणे उतरता क्रमाने ठेऊ शकतो. या सर्व चकत्या एका खांबामधून दुसऱ्या कोणत्याही एका खांबामध्ये अशा प्रकारे टाकायच्या की ज्यामुळे चकत्यांचा सुरुवातीचा अनुक्रम तसाच राहील. हे करताना काही नियम पाळायचे

आहेत. एकावेळी एक चकतीच हलविता येईल. छोट्या चकतीवर तिच्यापेक्षा मोठी चकती ठेवता येणार नाही. तुम्ही या कामात तिसऱ्या रिकाम्या खांबाचा वापर करू शकता.

दोन चकत्यांपासून सुरुवात करून त्या एका खांबामधून दुसऱ्या खांबामध्ये टाकण्यासाठी कमीत कमी किती पायऱ्या लागतील ते मोजा. ही कृती 3, 4 आणि त्यापेक्षा जास्त चकत्यांसाठी करा. या कामासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या आणि चकत्यांची संख्या यातील संबंध आपल्याला शोधून काढायचा आहे.



उत्तरः

ठरलेल्या अनुक्रमाने एका खांबातील चकत्या दुसऱ्या खांबामध्ये टाकण्यासाठी लागणाऱ्या कमीत कमी पायऱ्या 2^n-1 इतक्या असतात. येथे n म्हणजे चकत्यांची संख्या. उदा. 5 चकत्या एका खांबातून दुसऱ्या खांबात टाकण्यासाठी 31 पायऱ्या लागतात.

Recursive relation:

चकत्यांची संख्या	चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या कमीत कमी पायऱ्या
1	3
2	5
3	7
4	15

जेव्हा तुम्हाला 3 चकत्या एका खांबातून दुसऱ्या खांबात टाकायच्या असतात तेव्हा तुम्हाला प्रथम 2 चकत्या दुसऱ्या खांबात टाकाव्या लागतात. आता एका खांबात एक सर्वांत मोठी चकती असेल आणि दुसरा खांब ही मोठी चकती हलविण्यासाठी मोकळा असावा लागेल.

आपल्याला हे माहित आहे की 2 चकत्या हलविण्यासाठी 3 पायऱ्या लागतात. त्यानंतर तुम्ही सर्वात मोठी चकती हलवून रिकाम्या खांबामध्ये आणता आणि नंतर तुम्हाला उरलेल्या दोन चकत्या सर्वात मोठी चकतीवर टाकाता. यानंतर तुम्हाला पुन्हा दोन चकत्या सर्वात मोठ्या चकतीवर टाकता. यासाठी 3 पायऱ्या लागतात. अशा प्रकारे एकूण तीन चकत्या हलविण्यासाठी 3+1+3 इतक्या पायऱ्या लागतील.

4 चकत्यांसाठी वरील गोष्टी काम करतात का ते तपासून पहा.

2 चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या = 2(1 चकती हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या) + 1

3 चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या = 2(2 चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या) + 1

n चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या = 2((n-1)चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या पायऱ्या) + 1

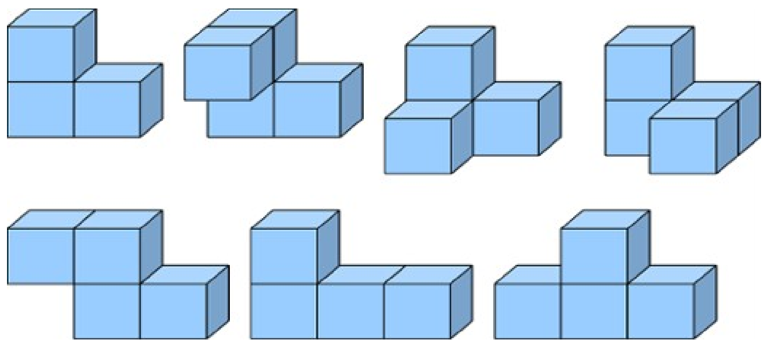
वरील टेबलवरून आपण हे पाहू शकतो की,

n एवढ्या चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या कमीत कमी पायऱ्या = $2^n - 1$

n+1 एवढ्या चकत्या हलविण्यासाठी लागणाऱ्या कमीत कमी पायऱ्या = $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$

सोमाचा क्यूब:

साहित्य: खाली दाखविल्याप्रमाणे 7 ठोकळे



खेळ:

हे सात तुकडे वापरून मोठा घन बनवा ($3 \times 3 \times 3$)

हा घन बनविण्याचे 220 मार्ग आहेत. तुम्हाला जमतील तितके मार्ग शोधण्याचा प्रयत्न करा. सोमाच्या क्यूबचे सात ठोकळे वापरून कॉट, खुर्ची, साप, इत्यादी आकारही बनविता येतात. या ठोकळ्यांचे वेगवेगळ्या प्रकारे आयोजन करून तुम्ही तुम्हाला पाहिजे ते आकारही बनवू शकता.

स्रोत:

काही कृती, खेळ आणि कोडी पुढील स्त्रोतांमधून घेऊन त्यात बदल केले आहेत.

1. The Mathematics Teacher, Vols 84-88, 1992-1996.

2. How Mathematics Works, by Carol Vorderman, Dorling Kindersley, London, 1996